Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 5

МЕХАНИКА

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ

МЕХАНИЗМЫ КОНИКОГРАФОВ С ОГИБАНИЕМ

1°. Известен ряд механизмов коникографов, которыми осуществляется не только черчение, но и огибание конических сечений ([1–4]). В настоящей работе излагается теория двух новых коникографов с огибанием.

В основе первого механизм коникографа лежит четырехзвенный кулисный механизм GMF (рис. 1a) с качающейся около точки F кулисой 4. Со звеном 3 жестко связана прямая Mm, образующая с направлением MF произвольный постоянный угол φ. Если точку F механизма установить в одном из фокусов эллипса, заданного своими полуосями a и b; точку G установить на оси Oy, проходящей через центр эллипса O на расстоянии OG, равном

$$OG = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\operatorname{tg}\varphi} = c\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad (1)$$

а длину кривошипа GM выбрать равной

$$GM = a\frac{1}{\sin\varphi}, \qquad (2)$$

то прямая Mm механизма будет при его движении огибать эллипс. Последнее следует из следующих геометрических соображений.

Проведем из точки O окружность радиуса a. По свойству эллипса эта окружность будет его подерой. Следовательно, если на этой окружности выбрать произвольную точку S и соединить ее с точкой F — фокусом эллипса и провести прямую Sm перпендикулярную к FS, то прямая Sm будет касательной к эллипсу ([2]). Проведем далее прямую FM под выбранным углом φ к прямой Sm. На оси Oy откладываем отрезок OG, удовлетворяющий условию (1), и соединяем точку G с точкой M. Соединив точку S с точкой O, получим, что треугольники FMS и FGO подобны, следовательно, $FM/FG = FS/FO$. Из последнего соотношения, учитывая, что углы MFG и SFO равны между собой, следует условие подобия треугольников FMG и FSO, следовательно, $GM/FG = OS/FO$, откуда, учитывая, что $FG = c\frac{1}{\sin\varphi}$, $OS = a$ и $FO = c$, получаем $GM = FG\frac{OS}{FO} = \frac{a}{\sin\varphi} = \text{const}$, т. е. геометрическим местом точек M будет окружность, описанная из точки G радиусом $GM = \frac{a}{\sin\varphi}$.

Таким образом, четырехзвенным механизмом GMF может быть осуществлено построение эллипса путем огибания. Так как угол φ может быть выбран произвольным, то очевидно, что существует бесчисленное количество механизмов, при помощи которых может быть осуществлено указанное построение. Как частный случай, когда $\varphi = 90°$, может быть получен коникограф, предложенный нами ранее ([2]).

2°. Присоединением к рассмотренному механизму двух двухповодковых групп может быть осуществлено одновременное черчение эллипса точкой B звена 8 (рис. 1a). Для этого воспользуемся ранее указанным

нами методом ([5]). Продолжаем направление MG до пересечения в точке P с перпендикуляром, восстановленным в точке F к направлению MF. Точка P будет мгновенным центром вращения звена *3*. Если к звеньям *2* и *4* присоединить двухповодковую группу, состоящую из звеньев *5* и *6*, то центр P вращательной пары, в которую входят звенья *5* и *6*, будет при движении механизма всегда совпадать с мгновенным центром вращения звена *3*. Если из точки P опустить перпендикуляр Pp на касательную Mm к эллипсу, то точка B пересечения направлений Pp и Mm будет точкой касания прямой Mm с эллипсом. Присоединяя звенья *7* и *8* (рис. 1*а*), выполненные в виде крестообразной кулисы со взаимно-перпендикулярными направляющими, получим 8-звенный механизм, который будет одновременно чертить и огибать эллипс.

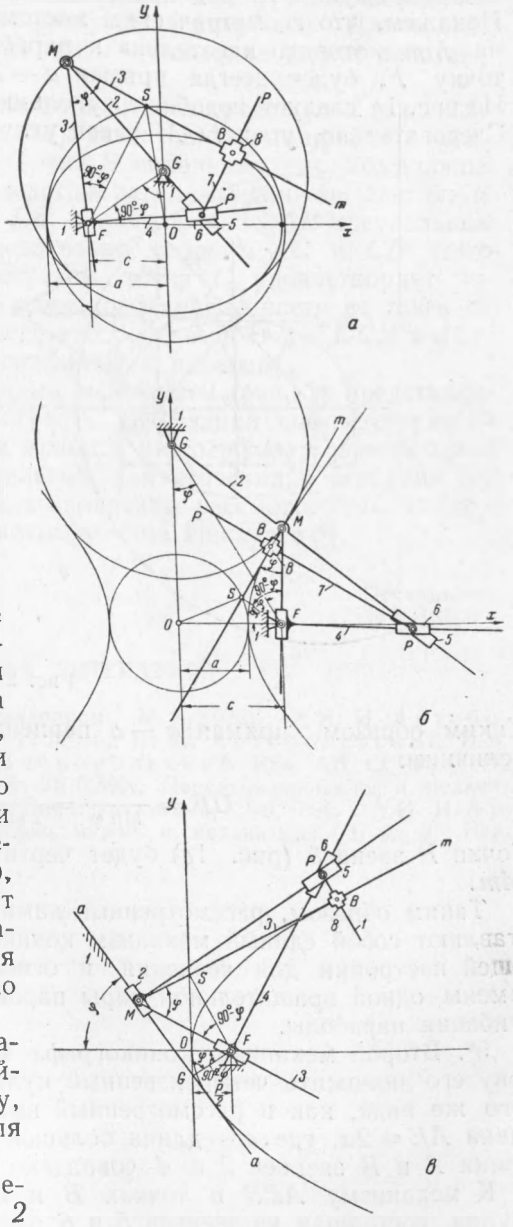


Рис. 1

3⁰. Черчение и огибание гиперболы может быть сделано механизмом (см. рис. 1*б*) с той же кинематической схемой, с установкой центра вращения кулисы *4* в фокусе F гиперболы и центра вращения кривошипа *2* в точке G, лежащей на оси Oy на расстоянии OG, удовлетворяющем условию (1). Нетрудно видеть, что если механизм установлен для черчения и огибания эллипсов (рис. 1*а*), то кулиса *4* делает полный оборот около оси F. При установке механизма для черчения и огибания гипербол (рис. 1*б*) кулиса только качается около оси F.

Доказательство того, что механизм, показанный на рис. 1*б*, действительно описывает гиперболу, анологично доказательству для эллипса.

4⁰. Для черчения данным механизмом параболы кривошип *2* (рис. 1*а*) должен быть заменен ползуном *2* (рис. 1*в*), двигающимся по прямой $a-a$, наклоненной к оси Ox параболы под углом φ. Ось $a-a$ должна проходить через точку G, лежащую на оси Oy на расстоянии OG, равном

$$OG = \frac{p}{2\operatorname{tg}\varphi}, \qquad (3)$$

где p — заданный параметр параболы.

В самом деле, прямая Oy, перпендикулярная к оси Ox параболы, является подерой параболы. Следовательно, если на прямой Oy выбрать

произвольную точку S, соединить точку S с фокусом F параболы и провести в точке S прямую Sm, перпендикулярную к прямой FS, то прямая Sm будет касательной к искомой параболе. Из точки F проводим прямую FM под произвольно выбранным углом φ к прямой Sm. Покажем, что геометрическим местом точек вершины угла FMm, сторона Mm которого касательна к параболе, а сторона MF проходит через точку F, будет всегда прямая $a-a$, удовлетворяющая условию (3). Из рис. 1*в* следует подобие треугольников FMS и FGO, $FM/FG = FS/FO$. Следовательно, угол FGM равен углу FOS, т. е. $\angle FGM = \angle FOS = 90°$.

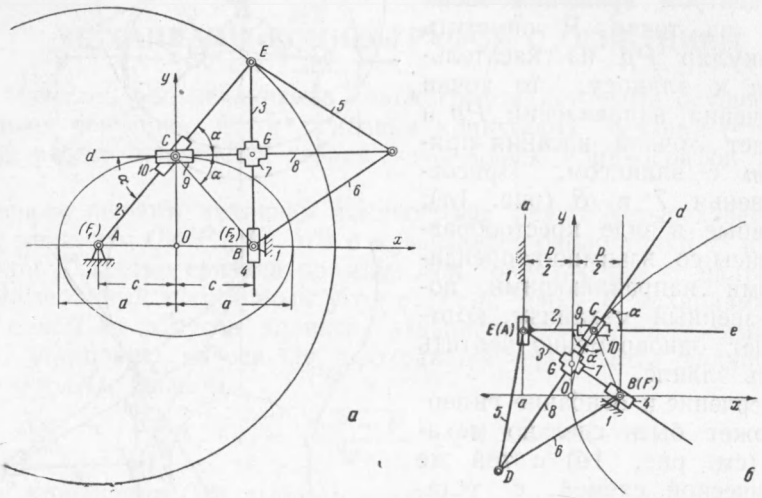


Рис. 2

Таким образом, прямая $a-a$ перпендикулярна к отрезку постоянной величины:

$$GF = \frac{OF}{\sin\varphi} = \frac{p}{2\sin\varphi} = \text{const}. \qquad (4)$$

Точка B звена *8* (рис. 1*в*) будет чертить параболу, огибаемую прямой Mm.

Таким образом, рассмотренные нами выше механизмы (рис. 1) представляют собой единый механизм коникографа, требующий соответствующей настройки для черчения и огибания эллипса или гиперболы и замены одной вращательной пары парой поступательной для черчения и огибания параболы.

5⁰. Второй механизм коникографа может быть получен, если в основу его положить четырехзвенный кулисный механизм AEB (рис. 2*а*) того же вида, как и рассмотренный выше, у которого длина кривошипа равна $AE = 2a$, где a — длина большой полуоси эллипса. Центры вращения A и B звеньев *2* и *4* совпадают с фокусами F_1 и F_2 эллипса.

К механизму AEB в точках B и E присоединена двухповодковая группа, состоящая из звеньев *5* и *6* равной длины. В точке D к этой группе присоединено звено *8*, скользящее в крестообразной кулисе *7* с взаимно-перпендикулярными направляющими. Далее присоединяем к механизму двухповодковую группу, состоящую из звеньев *9* и *10*, входящих в две поступательные и одну вращательную пары. Точка C механизма будет чертить эллипс и прямая Dd будет огибать эллипс.

Нетрудно видеть (рис. 2*а*), что вследствие равенства длин звеньев ED и DB и перпендикулярности прямой Dd к направлению EB треугольник CEB будет равнобедренным. Следовательно, $CE = CB = CF_2$. Тогда $AE = F_1C + CE = F_1C + CF_2 = 2a$, т. е. точка C механизма вычерчивает эллипс. Нетрудно также видеть, что вследствие равенства уг-

лов dCA и DCB, равных α, прямая Dd является касательной к эллипсу.

Для того, чтобы данным механизмом осуществить черчение и огибание гиперболы, точки A и B механизма (рис. 2$а$) устанавливаются, соответственно, в точках, являющихся фокусами гиперболы. Длина AE кривошипа 2 должна быть равна $2a$, где a — половина длины действительной оси гиперболы.

6⁰. Для черчения данным механизмом параболы кривошип 2 (рис. 2$а$) должен быть заменен ползуном (рис. 2$б$), двигающимся по прямой $a - a$, являющейся директрисой параболы. Точка B механизма (рис. 2$б$) должна совпадать с фокусом F параболы. Вследствие равенства длин звеньев 5 и 6 и перпендикулярности направления Dd к направлению AB треугольник ACB будет равнобедренным и, следовательно, стороны AC и CB этого треугольника будут равны. Таким образом, точка C удовлетворяет известному условию для параболы об одинаковой удаленности ее точек от директрисы $a - a$ и фокуса F. Вследствие равенства углов DCB и dCe, равных α, прямая Dd является касательной к параболе.

Таким образом, рассмотренные нами механизмы (рис. 2) представляют собою единый механизм коникографа, требующий соответствующей настройки для черчения и огибания эллипса и гиперболы и замены одной вращательной пары парой поступательной для черчения и огибания параболы. При несложном структурном изменении рассмотренный коникограф может быть приведен к коникографу типа Инвардса (4).

Институт машиноведения
Академии наук СССР

Поступило
29 VII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Каминский, Вестн. Металлопром., № 8 (1939). [2] И. И. Артоболевский, Вестн. инж. и техн., № 11—12 (1946); И. И. Артоболевский, Изв. АН СССР, ОТН, № 7 (1946). [3] В. В. Добровольский, Изв. АН СССР, ОТН, № 2 (1951). [4] Н. Б. Делоне, ЖРФХО, 25 (1893); Передача вращения и механическое черчение кривых шарнирнорычажными механизмами, СПб, 1894. [5] И. И. Артоболевский, Тр. семинара по теории машин и механизмов, 1, в. 3, Изд. АН СССР, 1947.