Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. СМИРНОВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 VII 1955)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\operatorname{sgn} y \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0. \tag{1}$$

Постановка задачи Б. Пусть D — односвязная область, ограниченная линией Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, расположенной в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками AC: $y = -x$ и BC: $y = x - 1$ уравнения (1).

Требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, y)$ является решением уравнения (1) внутри области D при $y \neq 0$. 2) Функция $u(x, y)$ и ее первые производные непрерывны в замкнутой области D. 3) Частные производные u_{xx}, u_{xy} и u_{yy} непрерывны внутри области D, причем вблизи точек A и B они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы. 4) Частные производные 3-го порядка непрерывны внутри области D, причем вблизи точек A и B они могут обращаться в бесконечность порядка ниже двух. 5) На линии σ и на характеристиках AC и BC $u(x, y)$ принимает заданные значения

$$u|_\sigma = \varphi_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\sigma = \varphi_2(r) \quad (0 \leqslant s \leqslant l); \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=-x} = \psi_3(x) \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right); \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=x-1} = \psi_4(x) \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right), \tag{3}$$

где n — внутренняя нормаль.

Будем предполагать, что функция $\varphi_1(s)$ трижды непрерывно дифференцируема, $\varphi_2(s)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функции $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ имеют производные до 3-го порядка включительно, удовлетворяющие условию H.

Обозначим через L замкнутый контур $AB\sigma A$ и будем предполагать, что декартовы координаты точек линии L имеют производные 3-го порядка по дуге, удовлетворяющие условию H.

Для задачи Б доказывается существование и единственность решения. Укажем идею доказательства.

Общее решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), в гиперболической части D_2 области D выражается по формуле

$$u(x, y) = f\left(\frac{1+x+y}{2}\right) + F\left(\frac{x-y}{2}\right) - \frac{x+y}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{x-y}{2} F'\left(\frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{x+y}{\sqrt{2}} \psi_3\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1-x+y}{\sqrt{2}} \psi_4\left(\frac{1+x+y}{2}\right) + \\ + \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{2}} \psi_4'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{x+y}{2\sqrt{2}} \psi_4'\left(\frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

где f и F — произвольные функции.

Исключая из (4) произвольные функции f и F, получим два соотношения на линии $y = 0$:

$$\tau''(x) - \nu_1(x) = \sqrt{2}\left[\psi_3'\left(\frac{x}{2}\right) - \psi_4'\left(\frac{1+x}{2}\right) + \psi_4'\left(\frac{1}{2}\right)\right] = g_1(x), \quad (0 < x < 1),$$

$$\nu''(x) - \nu_2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\psi_3''\left(\frac{x}{2}\right) + \psi_4''\left(\frac{1+x}{2}\right)\right] = g_2(x),$$

где положено

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad \nu(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}, \quad \nu_1(x) = \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2}, \quad \nu_2(x) = \frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial y^3}.$$

Таким образом приходим к следующей задаче (I):

Найти в эллиптической части D_1 области D регулярное решение бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = 0, \tag{5}$$

удовлетворяющее граничным условиям (2) и

$$u_{xx} - u_{yy}\big|_{y=0} = g_1(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y}(u_{xx} - u_{yy})_{y=0}\Big| = g_2(x) \quad (0 < x < 1), \tag{6}$$

имеющие непрерывные производные 2-го и 3-го порядков вплоть до отрезка AB, за исключением, может быть, точек A и B, где они могут обращаться в бесконечность, соответственно, порядка ниже 1 и 2, причем вблизи точек A и B имеют место оценки

$$|\Delta u| \leqslant \frac{k_1}{|z - c|^\gamma}, \quad \left|\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right| \leqslant \frac{k_2}{|z - c|^{\gamma+1}} \quad (0 \leqslant \gamma < 1),$$
$$|\nu'(x)| \leqslant \frac{k_3}{|x - c|^\delta} \qquad (0 \leqslant \delta < 1), \tag{7}$$

где c обозначает точку A или B; k_1, k_2 и k_3 — положительные постоянные.

Решив задачу (I), мы будем знать $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, и в области D_2 функция $u(x, y)$ определяется решением задачи Коши:

$$u(x, 0) = \tau(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu(x), \qquad \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} = \nu_1(x),$$
$$\frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial y^3} = \nu_2(x) \quad (0 < x < 1).$$

Это решение дается формулой:

$$8u(x, y) = 4[\tau(x + y) + \tau(x - y)] - 2y[\tau'(x + y) - \tau'(x - y)] -$$
$$- 2y[\nu(x + y) + \nu(x - y)] + 6\int_{x-y}^{x+y} \nu(t)\,dt + 2y\int_{x-y}^{x+y} \nu_1(t)\,dt -$$
$$- \int_{x-y}^{x+y} [x - t)^2 - y^2]\,\nu_2(t)\,dt. \tag{8}$$

Таким образом, задача Б будет полностью решена.

Единственность решения задачи (I) легко получается из формулы Грина, а отсюда следует также единственность решения задачи Б.

Используя комплексное представление бигармонической функции, можно задачу (I) свести к эквивалентной граничной задаче (I_1) теории функций комплексного переменного: найти две H_1^*-голоморфные (1) функции $\varphi(z)$ и $\varkappa(z)$ в области D_1, удовлетворяющие на контуре этой области граничному условию

$$\begin{gathered}\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f_1(t) \quad (t\in\sigma),\\ 5\varphi(t)-\overline{\varphi(t)}-t\overline{\varphi'(t)}-3\bar{t}\varphi'(t)-3\psi(t)-\overline{\psi(t)}=g(t)+2c \quad (t\in AB),\end{gathered} \tag{9}$$

где $f_1(t)$ и $g(t)$ — известные функции, c — комплексная постоянная, $\varkappa'(z)=\psi(z)$.

Искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ ищем в виде (2):

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z},$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}\,d\bar{t}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{t}\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

Тогда граничная задача (I_1) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами:

$$A(t_0)\,\rho(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\rho(t)\,dt}{t-t_0}+k(t_0)=f(t_0), \tag{10}$$

где $\rho(t_0)=\{\omega(t_0),\ \overline{\omega(t_0)}\}$ — искомый вектор; $f(t_0)$ — известный вектор; $k(t_0)=\{k_2(t_0),\ k_2^*(t_0)\}$; $k_2(t_0)$, $k_2^*(t_0)$ — операторы Фредгольма.

$$A(t_0)=\begin{Vmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & 1\end{Vmatrix},\qquad B(t_0)=\begin{Vmatrix}-\beta_1 & -\beta_2\\ -\beta_2 & -\beta_1\end{Vmatrix},$$

$$\alpha=\begin{cases}0,\\ -1,\end{cases}\quad \beta_1=\begin{cases}0,\\ 3/2,\end{cases}\quad \beta_2=\begin{cases}0, & \text{если } t_0 \text{ лежит на } \sigma;\\ -1/2, & \text{если } t_0 \text{ лежит на } AB.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что система (10) нормального типа и что все точки разрыва неособенные. Суммарный индекс $\varkappa$ системы (10) вычисляется по известной формуле Н. И. Мусхелишвили (3) и в классе решений h_2 (4) $\varkappa=-2$. На основании единственности решения задачи (I) доказывается, что система (10) всегда разрешима при соответствующем выборе постоянной c.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 VII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисск. матем. инст., 11 (1942). [2] Д. И. Шерман, ДАН, 28, № 1 (1940). [3] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946. [4] Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, М., 1950.