Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

ГЕОФИЗИКА

Ш. А. ЦМУСАЕЛЯН

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ НЕРОВНОСТЕЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЕТОМ СФЕРИЧНОСТИ ЗЕМЛИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 12 III 1955)

После выхода в свет работы Н. Е. Кочина [1] советские и зарубежные ученые неоднократно обращались к проблеме обтекания горных препятствий воздушным потоком [2-4, 6-10]. Наиболее важными из полученных в этих работах результатов, на наш взгляд, являются: а) обнаруженный А. А. Дородницыным эффект обращения линий тока по вертикали над горным препятствием и наличие волн за хребтом вниз по течению и б) указанное И. А. Кибелем явление сегментации циклона хребтом. Во всех указанных работах задача решалась для так называемой «плоской Земли».

В данной работе делается попытка выяснить картину возмущений воздушного потока, порождаемых горным препятствием, с учетом сферичности Земли.

Будем считать Землю шаром радиуса $a = 6{,}37 \cdot 10^6$ м, который вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$, а атмосферу — бароклинной, причем температура в ней линейно падает с высотой. Предполагается, что движение атмосферы состоит из основного движения «чисто зональной циркуляции» и наложенных на последнее возмущений, порождаемых неровностями рельефа поверхности Земли. Процессы, происходящие в атмосфере, предполагаются сухоадиабатическими. Решается стационарная задача методом длинных волн в рамках линейной теории.

Введем сферические координаты: r — расстояние от центра Земли; $\theta (= \pi/2 - \varphi)$ — дополнение до широты φ; λ — долгота места (ось r направлена вертикально вверх, λ — на восток, θ — на юг).

Обозначим, как обычно, через v_λ, v_θ и w составляющие вектора скорости, соответственно, по осям λ, θ и r; p — давление; ρ — плотность.

Придерживаясь метода малых возмущений, положим (здесь предварительно введена новая координата $z = r - a$)

$$\begin{aligned} v_\lambda(\theta, \lambda, z) &= \bar{v}_\lambda(\theta) + v'_\lambda(\theta, \lambda, z) \\ v_\theta(\theta, \lambda, z) &= v'_\theta(\theta, \lambda, z), \\ w(\theta, \lambda, z) &= w'(\theta, \lambda, z), \\ p(\theta, \lambda, z) &= \bar{p}(\theta, z) + p'(\theta, \lambda, z), \\ \rho(\theta, \lambda, z) &= \bar{\rho}(\theta, z) + \rho'(\theta, \lambda, z), \end{aligned} \tag{1}$$

где v'_λ, v'_θ, w', p' и ρ' — малые возмущения, порожденные неровностями рельефа.

Если теперь задать ([5]) скорость зонального потока формулой

$$\bar{v}_\lambda(\theta) = \alpha a \sin\theta, \tag{2}$$

где α — угловая скорость движения воздуха относительно Земли (α называется индексом циркуляции), то линеаризованные относительно основного потока уравнения задачи могут быть записаны в следующем виде:

а) уравнения движения

$$\begin{aligned}
&\alpha \frac{\partial(\bar{\rho} v'_\lambda)}{\partial\lambda} + 2(\alpha+\omega)\cos\theta \cdot \bar{\rho} v'_\theta = -\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial p'}{\partial\lambda},\\
&\alpha \frac{\partial(\bar{\rho}\, v'_\theta)}{\partial\lambda} - 2(\alpha+\omega)\cos\theta \cdot \bar{\rho} v'_\lambda = -\frac{1}{a}\frac{\partial p'}{\partial\theta},\\
&0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} - g\rho';
\end{aligned} \tag{3а}$$

б) уравнение неразрывности

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\bar{\rho} w')}{\partial z} + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial(\bar{\rho}\, v'_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} +\\
&+\frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{\partial(\bar{\rho}\, v'_\lambda)}{\partial\lambda} + \alpha a \sin\theta \frac{\partial\rho'}{\partial\lambda}\right] = 0;
\end{aligned} \tag{3б}$$

в) уравнение притока тепла (уравнение сухой адиабаты)

$$\alpha \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\varkappa}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{p'}{\bar{p}} - \varkappa\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) + \frac{v'_\theta}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\varkappa} + w'\frac{\partial}{\partial z}\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\varkappa} = 0. \tag{3в}$$

Здесь $g \approx 10$ м/сек^2 — ускорение силы тяжести; $\varkappa = c_p/c_v \approx 1{,}41$.

Все искомые функции v'_λ, v'_θ, w', p', ρ' предполагаются периодическими (с периодом 2π) по λ, однозначными и ограниченными по θ, λ и z.

В качестве краевых условий возьмем следующие:

$$p' = 0 \quad \text{при } z = H \tag{4}$$

($H = 8\cdot 10^3$ м — высота однородной атмосферы);

$$w' = \alpha H \frac{\partial\eta}{\partial\lambda} \text{ при } z = 0. \tag{5}$$

Здесь $\eta(\theta,\lambda) = \zeta(\theta,\lambda)/H$; $z = \zeta(\theta,\lambda)$ — уравнение неровности рельефа.

Если функция $\eta(\theta,\lambda)$ разложима в ряд по шаровым функциям

$$\eta(\theta,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(\eta_n^m \cos m\lambda + \eta_n'^m \sin m\lambda)\ P_n^m(\cos\theta)$$

(η_i^m и $\eta_n'^m$ — известные постоянные), то при $z = 0$

$$w' = \alpha H \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\,(\eta_n'^m \cos m\lambda - \eta_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos\theta). \tag{6}$$

Решение системы (3) будем искать в виде ряда Фурье с коэффициентами, зависящими от θ и z.

Если обозначить пока неизвестные, подлежащие определению коэффициенты Фурье для функций $\bar{\rho}\,\bar{v}'_\lambda, \bar{\rho}\,\bar{v}'_\theta, \bar{\rho}\,\bar{w}', p', \rho'$, соответственно, через V^m_λ, V'^m_λ, V^m_θ, V'^m_θ, W^m, W'^m, Φ^m, Φ'^m, $\wp^m$, $\wp'^m$, то система для определения этих коэффициентов может быть записана в виде:

$$
\begin{gathered}
-\alpha m V^m_\lambda + 2(\alpha + \omega)\cos\theta \cdot V^m_\theta = \frac{m}{a\sin\theta}\Phi^m,\\
\alpha m V^m_\theta - 2(\alpha + \omega)\cos\theta \cdot V^m_\lambda = -\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi^m}{\partial\theta},\\
\frac{\partial \Phi^m}{\partial z} = -g\wp^m,\\
\frac{\partial W^m}{\partial z} + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial (V^m_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{m}{a\sin\theta}V^m_\lambda = 0,\\
\bar{T}\left(\wp^m - \frac{\Phi^m}{\varkappa R\bar{T}}\right)\alpha m + \frac{V^m_\theta}{a}\frac{\partial \bar{T}}{\partial\theta} + W^m(\gamma_a - \gamma) = 0.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь $\bar{T}$ — зональная температура. (Аналогичная система получается для функций, обозначенных теми же буквами, но со штрихами.)

Следовательно, уравнение для Φ^m может быть записано в виде:

$$
\begin{gathered}
\Omega\frac{\partial^2\Phi^m}{\partial z^2} + \Omega\frac{g}{\bar{T}}\left(\frac{1}{\varkappa R} + \frac{4M\omega\cos^2\theta}{a^2\alpha}\right)\frac{\partial\Phi^m}{\partial z} =\\
= \frac{(\gamma_a - \gamma)g}{a^2\bar{T}}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi^m}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Phi^m\right] -\\
- \frac{2\omega(\gamma_a - \gamma)g}{a^2\alpha\bar{T}}\left(1 + \frac{8\omega^2\cos^2\theta}{\Omega}\right)\Phi^m\ *
\end{gathered}
\tag{8}
$$

(M — перепад температуры между полюсом и экватором), где

$$
\Omega = \alpha^2 m^2 - 4\omega^2\cos^2\theta. \tag{9}
$$

При получении системы (7) и уравнения (8) были опущены члены высшего порядка малости. Так как $\alpha \approx 2\cdot 10^{-6}$ сек$^{-1}$, то $\Omega = 2\cdot 10^{-8}(2\cdot 10^{-4}\, m^2 - \cos^2\theta)$.

Решение уравнения (8) существенно зависит от знака Ω. Для Скалистых гор, например, достаточно взять $m = 10$, $n = 16$, так как их ширина по кругу широты составляет примерно 15—20°, а длина по меридиану — около 50—60°. Это означает, что для рассматриваемого случая, вне области экватора, всегда $2\cdot 10^{-4} m^2 \ll \cos^2\theta$ и $\Omega < 0$. Таким образом, имеем

$$
\Omega \approx -4\omega^2\cos^2\theta. \tag{10}
$$

Вместо Ω введем среднее по меридиану значение этой величины:

$$
\bar{\Omega} = -4\omega^2\overline{\cos^2\theta} \approx -2\omega^2.
$$

---

* Это уравнение можно решать обычным методом Фурье и свести его к уравнению класса Фукса, решение которого можно легко написать в виде ряда. Предлагаемый приближенный способ имеет то преимущество, что получается физически легко обозримое решение.

Для средних широт эта замена Ω на $\bar{\Omega}$ не может дать больших погрешностей. Тогда, записав искомое решение уравнения (8) в виде

$$\Phi^m(0, z) = \sum_n \Phi_n^m(z)\ P_n^m(\cos\theta), \tag{11}$$

для функции $\Phi_n^m(z)$ получим следующее уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\Phi_n^m}{dz^2} + \frac{g}{\bar{T}}\left(\frac{1}{\varkappa R} - \frac{2M}{a^2\alpha\omega}\right)\frac{d\Phi_n^m}{dz} - \frac{(\gamma_a - \gamma)g}{2a^2\omega^2\bar{T}}\left[n(n+1) - \frac{2}{\alpha/\omega}\right]\Phi_n^m = 0. \tag{12}$$

Соответственно краевые условия для Φ_n^m запишутся следующим образом:

$$\Phi_n^m = 0, \quad \text{при } z = H,$$

$$\frac{d\Phi_n^m}{dz} + \frac{g}{\varkappa R\bar{T}}\Phi_n^m + \frac{H\bar{\rho}g(\gamma_a - \gamma)}{\bar{T}}\tau_n^m = 0, \quad \text{при } z = 0. \tag{13}$$

Решение уравнения (12) при краевых условиях (13) показывает, что возмущения атмосферного давления, порождаемые крупными горными массивами, будут с высотой убывать по экспоненциальному закону. Этот эффект дополняет картину обтекания, полученную А. А. Дородницыным ([8]).

Для достаточно малых гор, для которых можно принять $\Omega \approx \alpha^2 m^2$, уравнение для Φ_n^m будет иметь вид:

$$\frac{d^2\Phi_n^m}{dz^2} + \frac{g}{\bar{T}}\left(\frac{1}{\varkappa R} - \frac{2M\omega}{a^2m^2\alpha^3}\right)\frac{d\Phi_n^m}{dz} +$$

$$+ \frac{\gamma_a - \gamma}{a^2m^2\alpha^3\bar{T}}\left[n(n+1) + \frac{2\omega}{\alpha}\left(1 + \frac{4\omega^2}{\alpha^2m^2}\right)\right]\Phi_n^m = 0.$$

Решение этого уравнения показывает, что возмущения, порождаемые малыми горами в поле атмосферного давления, изменяются с высотой по синусоидальному закону, что вполне согласуется с выводами, полученными А. А. Дородницыным ([8]).

Центральный институт
прогнозов

Поступило
10 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин, Тр. ГГО, в. 14, 19 (1937). [2] Н. Е. Кочин, Тр. ГГО, в. 28 (1938). [3] А. А. Дородницын, Тр. ГГО, в. 23 (1938). [4] А. А. Дородницын, Тр. ГГО, в. 31 (1940). [5] Е. Н. Блинова, ДАН, 39, № 7 (1943). [6] И. А. Кибель, Прикл. матем. и мех., № 5 (1944). [7] И. А. Кибель, Тр. НИУ ГУГМС, в. 30 (1947). [8] А. А. Дородницын, Тр. ЦИП, в. 21 (48) (1950). [9] И. А. Кибель, ДАН, 100, № 2 (1955). [10] G. Lyra, Zs. f. angew. Math. u. Mech., 23, No. 1 (1943).