Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

ГИДРАВЛИКА

Ф. И. ФРАНКЛЬ

УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ СО ВЗВЕШЕННЫМИ НАНОСАМИ*

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 IV 1955)

В нашей работе (1) были выведены точные осредненные уравнения неразрывности и динамические уравнения для движения жидкости со взвешенными наносами. При этом мы не пользовались никакими специальными допущениями, а опирались лишь на общие законы механики сплошных сред. Покажем, что таким же способом можно получить полную систему осредненных уравнений энергии.

Этих уравнений всего шесть: уравнения для кинетических энергий осредненного движения каждой фазы (твердой и жидкой) в отдельности; уравнения для осредненной кинетической энергии пульсаций каждой фазы в отдельности; уравнения для осредненной тепловой энергии каждой фазы в отдельности. Первая из названных пар уравнений является следствием осредненных динамических уравнений; остальные две пары должны быть получены отдельно.

Будем считать жидкость несжимаемой, а твердые частицы — недеформируемыми. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и в работе (1). Для компонент мгновенных местных скоростей («микроскоростей») мы будем, однако, пользоваться обозначениями u_1, u_2, u_3 как внутри жидкости, так и внутри твердых частиц: нетрудно видеть, что введенные в работе (1) обозначения u_{is} излишни. Заметим, что функции u_i непрерывны везде благодаря прилипанию жидкости на поверхности частиц.

В отношении массовых сил мы ради простоты ограничимся наиболее интересным случаем однородного силового поля

$$X_i = \text{const}, \tag{1}$$

так что

$$X_i^* = X_{is}^* = X_i; \quad X_i' = X_{is}' = 0. \tag{1a}$$

Как внутри твердых, так и внутри жидких частиц выполнены уравнения:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial (s u_k)}{\partial x_k} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial (1-s)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial [(1-s) u_k]}{\partial x_k} = 0; \tag{2a}$$

* Строгой и полной системы уравнений энергии в этом случае, повидимому, в литературе еще нет. М. А. Великанов (2) в результате ошибок при составлении уравнений энергии пришел к неправильной «гравитационной теории движения взвешенных наносов». В работе Г. И. Баренблатта (3) задача не решена до конца.

$$\rho_s\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}u_k\right)(su_i)=-\sum_{k=1}^{3}s\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}+\rho_s sX_i; \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}u_k\right)[(1-s)u_i]=-\sum_{k=1}^{3}(1-s)\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}+\rho(1-s)X_i. \tag{3a}$$

В самом деле, уравнения (2), (3) выполнены внутри твердых частиц ($s=1$) на основании общих законов механики сплошной среды, а внутри жидких частиц потому, что там $s=0$. С другой стороны, уравнения (2а), (3а) выполнены внутри жидкости ($s=0$) на основании общих законов механики сплошной среды, а внутри твердых частиц потому, что там $1-s=0$. Производные, входящие в уравнения (2), (2а), (3), (3а), терпят, однако, разрыв на границах твердых частиц.

Как показано в работе [1], после осреднения получаются уравнения

$$\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{t}}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial(\bar{s}u^*_{ks})}{\partial\bar{x}_k}=0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial(1-\bar{s})}{\partial\bar{t}}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial[(1-\bar{s})u^*_k]}{\partial\bar{x}_k}=0; \tag{4a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}u^*_{ks}\right)(\rho_s\bar{s}u^*_{is})=-\sum_{k=1}^{3}\bar{s}\frac{\partial\bar{p}_{ik}}{\partial\bar{x}_k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Pi_{iks}}{\partial\bar{x}_k}+R_i+\rho_s\bar{s}X_i; \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}u^*_k\right)[\rho(1-\bar{s})u^*_i]=$$

$$=-\sum_{k=1}^{3}(1-\bar{s})\frac{\partial\bar{p}_{ik}}{\partial\bar{x}_k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial\bar{x}_k}-R_i+\rho(1-\bar{s})X_i, \tag{5a}$$

где Π_{ik}, Π_{iks} — турбулентные напряжения для обеих фаз («макронапряжения») и R_i — осредненное сопротивление жидкости движению твердых частиц, содержащихся в единице объема*.

Из этих уравнений нетрудно получить уравнения энергии осредненного движения в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}u^*_{ks}\right)\left(\rho_s\bar{s}\frac{w^{*2}_s}{2}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}u^*_{is}\left[-\sum_{k=1}^{3}\bar{s}\frac{\partial\bar{p}_{ik}}{\partial\bar{x}_k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Pi_{iks}}{\partial\bar{x}_k}+R_i+\rho_s\bar{s}X_i\right]; \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}u^*_k\right)\left[\rho(1-\bar{s})\frac{w^{*2}}{2}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}u^*_i\left[-\sum_{k=1}^{3}(1-\bar{s})\frac{\partial\bar{p}_{ik}}{\partial\bar{x}_k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial\bar{x}_k}-R_i+\rho(1-\bar{s})X_i\right], \tag{6a}$$

где $w^{*2}_s=\sum_{i=1}^{3}u^{*2}_{is}$, $w^{*2}=\sum_{i=1}^{3}u^{*2}_i$.

---

* Мы изменили здесь знак R_i по сравнению с работой [1] с тем, чтобы было $R_i>0$, если эта сила направлена в сторону положительного направления оси x_i.

Для получения уравнений пульсационной энергии исходим из «микроскопических» динамических уравнений (4), (4а), которые благодаря (2), (2а) могут быть представлены в виде

$$\rho_s s\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)=-\sum_{k=1}^{3} s\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}+\rho_s s X_i;$$

$$\rho(1-s)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)=-\sum_{k=1}^{3}(1-s)\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}+\rho(1-s)X_i.$$

Из них теми же средствами, что и в работе [1] (сначала осреднение, затем снова переход к дифференциальной форме), получим

$$\rho_s\left(\frac{\partial}{\partial \bar t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \bar x_k}u_{ks}^{*}\right)\left[\bar s\left(\frac{w_s^{*2}}{2}+\frac{(w_s'^2)_s^{*}}{2}\right)\right]= \tag{7}$$

$$=-\sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial(u_{is}^{*}\Pi_{iks})}{\partial \bar x_k}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial K_{is}}{\partial \bar x_i}-\bar s\sum_{i,k=1}^{3}u_{is}^{*}\frac{\partial \bar p_{ik}}{\partial \bar x_k}+\sum_{i=1}^{3}u_{is}^{*}R_i+A_s+\rho_s\bar s\sum_{i=1}^{3}u_{is}^{*}X_i,$$

где $(w_s'^2)_s^{*}=\sum_{i=1}^{3}(u_{is}'^2)_s^{*}$; A_s означает работу сил направления, связанную с беспорядочным движением твердых частиц:

$$A_s=-\sum_{i,k=1}^{3}\overline{s u_{is}'\frac{\partial p_{ik}'}{\partial \bar x_k}} \tag{8}$$

и K_{is} означает осредненный поток пульсационной энергии, вызванный пульсационными скоростями:

$$K_{is}=\rho_s\,\overline{s u_{is}'\frac{w_s'^2}{2}} \tag{9}$$

(«турбулентная энергопроводность»).

Путем вычитания (6) из (7) получим:

$$\rho_s\left(\frac{\partial}{\partial \bar t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \bar x_k}u_{ks}^{*}\right)\left[\bar s\frac{(w_s'^2)_s^{*}}{2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_{is}^{*}}{\partial \bar x_k}+\frac{\partial u_{ks}^{*}}{\partial \bar x_i}\right)\Pi_{iks}+A_s-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial K_{is}}{\partial \bar x_i}, \tag{10}$$

и аналогично для жидкой фазы

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial \bar t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \bar x_k}u_k^{*}\right)\left[(1-\bar s)\frac{(w'^2)^{*}}{2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i^{*}}{\partial \bar x_k}+\frac{\partial u_k^{*}}{\partial \bar x_i}\right)\Pi_{ik}+A-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial K_i}{\partial \bar x_i}, \tag{10а}$$

где A означает осредненную работу сил напряжения, связанную с беспорядочными движениями жидких частиц:

$$A=-\sum_{i,k=1}^{3}\overline{(1-s)u_i'\frac{\partial p_i'}{\partial \bar x_k}}, \tag{8а}$$

а K_i — «турбулентную энергопроводность» жидкой фазы

$$K_i=\overline{\rho(1-s)u_i'\frac{w'^2}{2}}. \tag{9а}$$

Чтобы получить уравнения тепла для обеих фаз, начнем с неосредненных уравнений полной энергии в интегральной форме. Они имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{G}\rho_s s\left(\frac{w^2}{2}+e\right)dx_1\,dx_2\,dx_3=-\iint\limits_{F}\rho_s s u_n\left(\frac{w^2}{2}+e\right)dF-$$

$$-\iint\limits_{\Phi}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i p_{in}+q_n\right)d\Phi+\iiint\limits_{G}\rho_s s\sum_{i=1}^{3}u_i X_i\,dx_1\,dx_2\,dx_3, \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{G}\rho(1-s)\left(\frac{w^2}{2}+e\right)dx_1\,dx_2\,dx_3=-\iint\limits_{F}\rho(1-s)u_n\left(\frac{w^2}{2}+e\right)dF-$$

$$-\iint\limits_{\Psi}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i p_{in}+q_n\right)d\Psi+\iiint\limits_{G}\rho(1-s)\sum_{i=1}^{3}u_i X_i\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \qquad (11a)$$

Здесь e — внутренняя (тепловая) энергия единицы массы; q_i — вектор молекулярной теплопроводности; Φ — поверхность части области G, занятой твердыми частицами, и Ψ — поверхность части области G, занятой жидкими частицами.

Рассуждая как в работе [1], получим отсюда следующие осредненные уравнения тепла в дифференциальной форме:

$$\rho_s\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}u^*_{ks}\right)(\bar{s}\bar{e}^*_s)=-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial Q_{ks}}{\partial\bar{x}_k}-\sum_{k=1}^{3}\overline{s\frac{\partial q_k}{\partial\bar{x}_k}}, \qquad (12)$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}u^*_k\right)[(1-\bar{s})e^*]=$$

$$=-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial Q_k}{\partial\bar{x}_k}-\sum_{k=1}^{3}\overline{(1-s)\frac{\partial q_k}{\partial\bar{x}_k}}-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)p_{ik}}. \qquad (12a)$$

Таким образом, тепловая энергия возрастает за счет турбулентной и ламинарной теплопроводностей, а энергия жидкой фазы, кроме того, за счет осредненной работы микродеформаций; такого члена нет в уравнении для твердой фазы, поскольку мы твердые частицы предположили недеформируемыми.

Уравнения (6), (6а), (10), (10а), (12), (12а) представляют собой искомую систему осредненных уравнений энергии*.

Киргизский государственный университет

Поступило 10 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. И. Франкль, ДАН, 92, № 2 (1953). [2] М. А. Великанов, Вестн. Московск. унив., № 8 (1953); см. также Изв. АН СССР, ОТН, 1952, дискуссионные статьи по теории наносов. [3] Г. И. Баренблатт, Прикладн. матем. и мех., 17, в. 3 (1953).

* Для замыкания системы (4), (4а), (5), (5а), (6), (6а), (10), (10а), (14), (14а) требуется, конечно, определить величины Π_{lhs}, Π_{ik}, K_i, K_{is}, K_i, A_s, A, Q_{is}, Q_i, $-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)p_{ik}}$ при помощи тех или иных допущений.