Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

ФИЗИКА

Л. П. ГОРЬКОВ и И. М. ХАЛАТНИКОВ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГРИНОВСКИХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ НУЛЬ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 10 III 1955)

Исследование асимптотического поведения гриновских функций в электродинамике и псевдоскалярной мезонной теории проводилось за последнее время в ряде работ (1). В настоящей статье делается аналогичная попытка в отношении электродинамики спина нуль.

Как известно (2, 3), в кеммеровском формализме ряд теории возмущений строится совершенно аналогично обычной электродинамике, с тем отличием, что γ_σ заменяется на β_σ и фейнмановский фактор распространения свободного мезона, $(\hat{p} - m_1)^{-1}$, имеет вид *

$$(\hat{p} - m_1)^{-1} = \left\{\hat{p} + m_1 + \frac{\hat{p}^2 - p^2}{m_1}\right\} \frac{1}{p^2 - m_1^2}. \quad (1)$$

Кроме того, замкнутая мезонная петля входит в матричный элемент с другим знаком по сравнению с электродинамикой. Оказывается (3), что для электродинамики спина нуль собственно-энергетические диаграммы мезона и фотона расходятся квадратично; диаграммы вершинных частей, комптоновские диаграммы и рассеяние мезона на мезоне расходятся логарифмически. В свою очередь, в собственно-энергетических диаграммах мезона и фотона постоянная квадратично расходящаяся часть может быть выделена в массу, причем масса фотона, в силу градиентной инвариантности, должна полагаться равной нулю. После такого выделения остаются только логарифмически расходящиеся интегралы.

Интегральные уравнения, которым удовлетворяют гриновские функции мезона и фотона, исправленные учетом высших приближений, могут быть написаны в полной аналогии с электродинамикой и представляют собой результат точного суммирования ряда теории возмущений. Для функции $G(p)$ получаем:

$$G(p)\left\{\hat{p} - m_1 - \frac{e_1^2}{\pi i}\int B_\mu'(p, p-k, k)\, G(p-k)\, \beta_\nu D_{\mu\nu}(k) d^4k\right\} = 1. \quad (2)$$

Гриновская функция фотона $D_{\mu\nu}(k)$ разделяется на поперечную и продольную части $D_{\mu\nu}^t(k)$ и $D_{\mu\nu}^l(k)$ и представляется в виде **

$$D_{\mu\nu}^{tr}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{d_t(k^2)}{k^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\frac{d_l(k^2)}{k^2}. \quad (3)$$

Физический смысл имеет только поперечная часть, уравнение для которой имеет вид:

---

* Здесь $\hat{p} = \beta_h p_h$ и β-матрицы удовлетворяют соотношениям коммутации:

$$\beta_\lambda\beta_\rho\beta_\mu + \beta_\mu\beta_\rho\beta_\lambda = \beta_\lambda\delta_{\mu\rho} + \beta_\mu\delta_{\lambda\rho}.$$

Мы используем обозначения (4).

** В нулевом приближении $d_t = 1$.

$$D'_{\mu\sigma}(k)\left\{k^2\delta_{\sigma\nu}-\frac{e_1^2}{\pi i}\int \mathrm{Sp}\,[G(p)\,B_\sigma(p,\ p-k,\ k)\,G(p-k)\,\beta_\nu]\,d^4p\right\}=$$

$$=\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \qquad (4)$$

Продольная часть может быть выбрана произвольной вследствие поперечности тензора поляризации.

Напишем матричный элемент для собственно-энергетической диаграммы мезона в первом приближении при пространственных $-p^2\gg m^2$:

$$G^{-1}(p)=\hat{p}-m_1+\frac{3X}{m_1}\frac{e_1^2}{\pi i}\int\frac{d^4k}{k^2}-\frac{e_1^2}{8\pi}(\hat{p}+2m_1)\ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}+$$

$$+\frac{e_1^2}{16\pi}\left[\hat{p}-m_1+\frac{3X}{m_1}(p^2-m_1^2)\right]\ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}(d_l-1); \qquad (5)$$

квадратично расходящийся интеграл может быть включен в массу*. Вычисление матричного элемента для поправки первого порядка к вершинной части приводит к следующему асимптотическому выражению для «пространственной» $B_\sigma(p,\ p-l,\ l)$ при больших аргументах, наибольший из которых обозначим через f^2:

$$B_\sigma(p,\ p-l,\ l)=\beta_\sigma-\frac{e_1^2}{8\pi}\beta_\sigma\ln\frac{\Lambda^2}{-f^2}+\frac{e_1^2}{16\pi}\left[\beta_\sigma+\frac{3X}{m_1}(2p-l)_\sigma\right]\ln\frac{\Lambda^2}{-f^2}(d_l-1). \qquad (6)$$

Интересно, что, в отличие от обычной электродинамики, не только продольная, но и поперечная часть фотонной гриновской функции приводит к расходимостям. Член $\frac{3X}{m_1}(2p-l)_\sigma\ln\frac{\Lambda^2}{-f^2}(d_l-1)$, в силу тождества Уорда, указывает, что логарифмические расходимости в радиационных поправках к комптон-эффекту встречаются только в комбинации (d_l-1). Этот результат может быть получен также непосредственно из рассмотрения матричного элемента первой поправки к комптон-эффекту. Таким образом, при выборе $d_l=d_t$ комптоновские диаграммы оказываются конечными и не дают логарифмического вклада, что является следствием использования β-формализма; в уравнениях второго порядка комптоновские диаграммы расходятся каждая в отдельности и только при объединении, осуществляемом β-формализмом, и при специальном выборе $d_l=d_t$ дают вместе конечное выражение. Это обстоятельство позволяет написать интегральное уравнение для вершинной части с учетом только тех диаграмм, которые дают логарифмический вклад в степени, равной порядку теории возмущений ([1]),

$$B_\sigma(p,\ p-l,\ l)=\beta_\sigma+\frac{e_1^2}{\pi i}\int B_\mu(p,\ p-k,\ k)\,G(p-k)\,B_\sigma(p-k,\ p-k-l,l)\times$$

$$\times G(p-k-l)\,B_\mu(p-k-l,\ p-l,\ k)\,D(k)\,d^4k. \qquad (7)$$

В этом уравнении учитываются только непересекающиеся виртуальные фотонные линии, что справедливо лишь при выборе $d_l=d_t$, в соответствии с чем гриновская функция фотона выбирается в виде

$$D_{\mu\nu}(k)=\delta_{\mu\nu}\frac{d(k^2)}{k^2}.$$

Перейдем к определению асимптотического поведения величин, используя метод, развитый в работе ([5]). Как известно, требование перенормируемости позволяет из простых размерностных соотношений получить в перенормируемых теориях вид функциональной зависимости всех гриновских функций при больших импульсах, а затем путем сравнения с рядом теорий возмущений непосредственно опре-

* Матрицы X и Y: $X=\frac{\beta_\lambda\beta_\lambda-1}{3}$; $Y=1-X$; $XY=0$ ([3]).

делять эту зависимость. Для гриновской функции фотона вычисление матричного элемента поляризации вакуума дает в первом приближении по e^2 *

$$D^t_{\mu\sigma}(k)\left\{k^2\delta_{\sigma\nu}+k^2\left(\delta_{\sigma\nu}-\frac{k_\sigma k_\nu}{k^2}\right)\frac{e_1^2}{12\pi}\left[\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{2}{3}-2\frac{4m^2-k^2}{k^2}\left(1-\frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta}\right)\right]\right\}=$$
$$=\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$

где $k^2=4m^2\sin^2\theta$. При $-k^2\gg m^2$ получаем выражение для $d_t(k^2)$:

$$d_t(k^2)=1+\frac{e_1^2}{12\pi}\ln\frac{-k^2}{\Lambda^2}. \qquad (8)$$

С другой стороны, фотон взаимодействует не только с частицами спина нуль, но и со спином $^1/_2$, а, может, и с другими частицами. Поэтому вместо (8) следует писать

$$d_t(k^2)=1+\frac{e_1^2}{3\pi}\nu\ln\frac{-k^2}{\Lambda^2},$$

где ν — эффективное число сортов различных частиц; частицы со спином $^1/_2$ дают в ν вклад 1, со спином нуль $^1/_4$. Зависимость $e_1^2d_t(k^2)$ при больших импульсах имеет вид $e_1^2d_t(k^2)=F[-k^2/\Lambda^2\varphi(e_1^2)]$, где F и φ — обратные функции: $F(\varphi(x))=x$. Обращая эту зависимость относительно $-k^2/\Lambda^2$ и разлагая по степеням $e_1^2(d_t-1)$, получим, согласно (8):

$$1=Q'(e_1^2)(e_1^2)^2\frac{\nu}{3\pi},\quad \text{где } Q(x)=\ln\varphi(x).$$

Решение этого дифференциального уравнения определяет функции

$$\varphi(x)=e^{-3\pi/x\nu};\quad F(x)=-\frac{3\pi}{\nu}\frac{1}{\ln x}.$$

Таким образом:

$$e_1^2d_t(k^2)=\frac{e_1^2}{1+\frac{e_1^2}{3\pi}\nu\ln\frac{\Lambda^2}{-k^2}}. \qquad (9)$$

Экспериментальный заряд e и перенормированная функция d_{tc} равны:

$$e^2=\frac{e_1^2}{1+\frac{e_1^2}{3\pi}\nu\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}},\quad d_{tc}(k^2)=\frac{1}{1-\frac{e^2}{3\pi}\nu\ln\frac{-k^2}{m^2}}. \qquad (10)$$

Переходя к вершинной части и мезонной гриновской функции, укажем, что при выборе $d_l=d_t$, как это следует из выражений (5) и (6), их можно искать в виде **

$$G^{-1}(p)=\frac{\hat p-m_1(p^2)}{\beta(p^2)}-\frac{X_\varepsilon}{m_1},\quad B_\sigma(p,\ p-l,\ l)=\beta_\sigma\alpha(f^2). \qquad (11)$$

Здесь ε — постоянная поправка к массе, имеющая порядок $e_1^2\Lambda^2$.

Функция $G(p)$ мезона состоит из скалярной $(G_{55}(p))$ ***, векторной

---

* Отметим, что в аналогичном выражении в работе [4] пропущен коэффициент $^1/_2$.

** Оператор, обратный к оператору вида $\left(\hat p-m-\frac{XA}{m}\right)$, равен $\left(\hat p-m-\frac{XA}{m}\right)^{-1}=$
$=\left\{\hat p+m_t+\frac{\hat p^2-p^2}{m}+\frac{YA}{m}\right\}\frac{1}{p^2-m^2-A}$.

*** Чтобы перейти к скалярной формулировке теории, достаточно ограничиться величиной $\frac{1}{m_1}G_{55}(p)$, которая и представляет собой гриновскую функцию мезона в соответствующих уравнениях второго порядка.

($G_{i5}(p)$) и тензорной ($G_{ik}(p)$) величин. Естественно, что эти компоненты перенормируются различным образом. Рассматривая при $-p^2 \gg m^2$ отдельно скалярную компоненту

$$G_{55}(p) = \beta(p^2)\, m_1(p^2)\, \frac{1}{p^2} \tag{12а}$$

и векторную компоненту

$$G_{i5}(p) = \beta(p^2)\, \frac{p_i}{p^2}, \tag{12б}$$

получим из требования перенормируемости вид функциональной зависимости рассматриваемых функций:

$$\beta(p^2) = \frac{H[e_1^2 d_t(p^2)]}{H(e_1^2)}, \quad \beta(p^2)\frac{m_1(p^2)}{m_1} = \frac{F[e_1^2 d_t(k^2)]}{F(e_1^2)}. \tag{13}$$

Ограничиваясь членами, которые в теории возмущений дают логарифмический вклад в степени, совпадающей с порядком теории возмущений, получим для $H(x)$ и $F(x)$ выражения:

$$H(x) = x^{-3/8\nu}, \quad F(x) = x^{-3/2\nu}.$$

Подставляя эти выражения в (13), для функций $\beta(p^2)$ и $m_1(p^2)$, находим:

$$\beta(p^2) = \left(1 + \frac{e_1^2}{3\pi}\,\nu \ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)^{3/8\nu}, \tag{14}$$

$$m_1(p^2) = m_1\left(1 + \frac{e_1^2}{3\pi}\,\nu \ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)^{9/8\nu}. \tag{15}$$

Этот результат был получен при специальном выборе $d_l = d_t$ в предположении, что имеют место соотношения (11) и (13). Отметим, что требование перенормируемости не является тривиальным для электродинамики частиц со спином нуль в β-формализме, равно как и вид (11) функции $G(p)$. В следующей статье ([6]) эти результаты будут получены независимым путем при помощи решения интегральных уравнений (2), (3), (7). Экспериментальная масса m определяется соотношением

$$m^2 = m_1^2(m^2) + \varepsilon,$$

где ε — постоянная порядка $e_1^2\Lambda^2$. Поскольку векторная и скалярная компоненты функции $G(p)$ градиентно преобразуются одинаковым образом, функция $m_1(p^2)$ не зависит от d_l.

Наконец, выпишем отдельно скалярную, векторную и тензорную компоненты функции $G(p)$ при $d_l = d_t$ и $|p^2| \gg m^2$:

$$G_{55}(p) = m_1\left(1 + \frac{e^2}{3\pi}\,\nu \ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)^{3/2\nu}\frac{1}{p^2}, \quad G_{i5}(p) = \left(1 + \frac{e_1^2}{3\pi}\,\nu \ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)^{3/8\nu}\frac{p_i}{p^2},$$

$$G_{ik}(p) = \frac{1}{m_1}\left(1 + \frac{e_1^2}{3\pi}\,\nu \ln\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right)^{-3/4\nu}\left(\frac{p_i\, p_k}{p^2} - \delta_{ik}\right)$$

Авторы выражают благодарность акад. Л. Д. Ландау за постоянное внимание и помощь в работе.

Институт физических проблем
им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР

Поступило
8 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, 497, 773, 1177 (1954); А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников, ДАН, 97, 793 (1954). [2] D. C. Peaslee, Phys. Rev., 81, № 1, 94 (1951). [3] A. Salam, Proc. Roy. Soc., 211, 276 (1952). [4] R. Feynman, Phys. Rev., 76, 769 (1949). [5] M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev., 95, 1300 (1954). [6] Л. П. Горьков, И. М. Халатников, ДАН, 103, № 5 (1955).