Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

П. А. ЖУРАВЛЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА С. А. ХРИСТИАНОВИЧА К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 7 IV 1955)

1. Поставим задачу: найти поле скоростей и форму свободной поверхности тяжелой несжимаемой идеальной жидкости, движущейся установившимся безотрывным потоком в канале с горизонтальным дном и вертикальными стенками, прямолинейными в верхнем и нижнем бьефах и плавно сужающимися в переходном участке (рис. 1). При этом предположим, что всюду скорость ниже критической, равной скорости распространения длинных поверхностных волн ([1]), и что бесконечно далеко вверх по потоку частицы жидкости движутся равномерно и прямолинейно с распределением давлений по гидростатическому закону; на всей свободной поверхности давление постоянно.

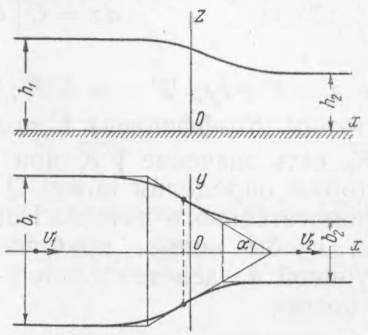


Рис. 1

Поскольку точное решение этой задачи весьма затруднительно, будем решать ее приближенно, допуская, что вертикальное ускорение частиц жидкости мало по сравнению с ускорением силы тяжести (это приводит к гидростатическому закону распределения давлений во всем потоке) и что горизонтальные составляющие скорости не зависят от вертикальной координаты z. Вертикальная составляющая скорости при этом не считается равной нулю, но квадрат ее должен быть мал по сравнению с квадратом полной скорости.

Известно, что в таком случае, после ведения потенциала скорости $\varphi(x, y)$ и функции тока $\psi(x, y)$ получаются следующие приближенные уравнения (см. например, ([2])):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{H}{h}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{H}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + 2gh = 2gH \tag{1}$$

для определения функций φ, ψ и глубины потока h в зависимости от координат x, y плоскости дна канала; постоянную величину H назовем удельной энергией потока.

Известно также, что уравнения (1) аналогичны уравнениям движения гипотетического сжимаемого газа с показателем адиабаты $\varkappa = 2$, плотность которого соответствует глубине потока.

2. Для решения этих уравнений применим метод С. А. Христиановича для газовых потоков с дозвуковыми скоростями ([3],[4]), согласно которому уравнения (1) заменяются двумя системами линейных уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \sqrt{K}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\sqrt{K}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \tag{3}$$

где Φ, Ψ — соответственно, потенциал и функция тока плоско-параллельного вспомогательного потока в плоскости ξ, η; коэффициент $\sqrt{K}$ зависит от ξ и η через посредство скорости, причем при скоростях v, не близких к критической ($v_{кр} = \sqrt{2/3\, gH}$), $\sqrt{K}$ мало отличается от единицы. В дальнейшем этот коэффициент считаем постоянным, а при скоростях, меньших 0,65 $v_{кр}$, просто равным единице.

Тогда связь между плоскостями вспомогательного и действительного потоков устанавливается при помощи формулы

$$dz = C\left[C_1 d\zeta + C_2\left(\frac{\overline{\partial W}}{\partial \zeta}\right)^2 d\overline{\zeta}\right], \tag{4}$$

где $z = x + iy$; $W = \Phi + i\Psi$; $\zeta = \xi + i\eta$; $\overline{W}$, $\overline{\zeta}$ обозначают сопряженные функции. Коэффициент C подобия потоков равен $C = \sqrt{K_0}\, Q / HQ_в$, где $\sqrt{K_0}$ есть значение $\sqrt{K}$ при некоторой средней скорости v_0 потока, которую определим ниже; Q — расход жидкости в канале; $Q_в$ — расход вспомогательного потока. Постоянные C_1 и C_2 должны быть выбраны так, чтобы новые, приближенные зависимости между скоростью v, глубиной h действительного потока и скоростью V вспомогательного потока:

$$v = \frac{V}{C_1 + C_2 V^2}, \quad \frac{H}{h} = \frac{C_1 - C_2 V^2}{C_1 + C_2 V^2}\sqrt{K_0} \tag{5}$$

возможно меньше отличались от точных зависимостей, соответствующих переменному коэффициенту $\sqrt{K}$:

$$\Lambda = C_\Lambda \sqrt{\frac{1-u}{1+u}\left(\frac{\sqrt{3}+u}{\sqrt{3}-u}\right)^{\sqrt{3}}}, \quad u = \sqrt{\frac{3(1-\lambda^2)}{3-\lambda^2}}, \quad \Lambda = \frac{V}{v_{кр}} \quad \lambda = \frac{v}{v_{кр}}\,^*, \tag{6}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{3}{3-\lambda^2}. \tag{7}$$

При $0 \leqslant v \leqslant 0{,}65\, v_{кр}$ можно положить $C_1 = 1$, $v_{кр}^2 C_2 = -0{,}1923$.

3. Вследствие значительного усложнения граничных условий для уравнений (2) и (3) решить задачу на определение движения жидкости в канале заданной формы (в плоскости x, y) весьма затруднительно. Однако метод С. А. Христиановича дает возможность найти движение жидкости в канале наперед заданной ширины в верхнем (b_1) и нижнем (b_2) бьефах с заданным наибольшим углом α наклона стенок его в местах их перегиба (рис. 1). С этой целью в качестве вспомо-

---

* Коэффициент C_Λ определяем из условия $\lim\limits_{v \to v_0} \frac{V}{v} = 1$.

гательного потока возьмем поток, определяемый комплексным потенциалом

$$W = U\zeta + \frac{m}{2\pi} \ln \cos \frac{\pi\zeta}{ai}. \tag{8}$$

Особенность данного плоско-параллельного потока заключается в том, что частицы жидкости его бесконечно далеко вверх и вниз по потоку движутся равномерно и прямолинейно, но с разными скоростями. Аналогичным будет и действительный поток жидкости в канале.

Подберем параметры U, m, a и расход $Q_в$ вспомогательного потока так, чтобы для потока жидкости в канале с заданными величинами b_1, b_2 и α были выполнены и наперед заданные условия бесконечно далеко вверх и вниз по потоку, где скорости равны v_1 и v_2, глубины h_1 и h_2. Заметим, что величины v_1, h_1, b_1, v_2, h_2, b_2 связаны между собой двумя соотношениями:

$$v_1 h_1 b_1 = v_2 h_2 b_2, \quad v_1^2 + 2gh_1 = v_2^2 + 2gh_2.$$

Для определения параметров по формулам (6) находим скорости V_1 и V_2 вспомогательного потока, соответствующие скоростям v_1 и v_2 действительного потока $\left(\text{в данной задаче полагаем } v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}\right)$, а по ним величины U и $\frac{m}{a}$:

$$U = \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad \frac{m}{a} = V_2 - V_1. \tag{9}$$

Решая систему из трех уравнений — уравнения границы вспомогательного потока и двух других $\left(\frac{2\pi}{a}\,\xi\mu, = \frac{2\pi}{a}\,\eta = \nu, \quad n = \frac{\pi Q_в}{m}, \right.$ $\left. k = \frac{2U}{m/a}\right)$:

$$\text{th}\,\frac{\mu}{2} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \operatorname{tg}\left(n - k\frac{\nu}{2}\right), \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{d\nu}{d\mu}, \quad \frac{d^2\nu}{d\mu^2} = 0, \tag{10}$$

определим безразмерные координаты μ и ν точки перегиба границы потока

$$\text{th}\,\mu = -\frac{2k}{k^2+1}, \quad \operatorname{tg}\nu = -\frac{2k\operatorname{tg}\alpha}{1 - k^2\operatorname{tg}^2\alpha}$$

и параметр n.

Формулы перехода (4) от плоскости ξ, η к плоскости x, y после интегрирования и разделения на вещественную и мнимую части примут вид $\left(\frac{2\pi}{a}\,x = \tilde{x}, \ \frac{2\pi}{a}\,x_0 = \tilde{x}_0, \ \frac{2\pi}{a}\,y = \tilde{y}\right)$:

$$\frac{1}{C}(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = C_1\mu + C_2\frac{U^2}{k^2}\left[(k^2+1)\mu + 2k\ln D - \frac{\text{sh}\,\mu}{D}\right],$$

$$\frac{1}{C}\tilde{y} = C_1\nu + C_2\frac{U^2}{k^2}\left[(k^2-1)\nu - 4nk + \frac{\sin\nu}{D}\right], \tag{11}$$

$$D = {}^1\!/_2(\text{ch}\,\mu + \cos\nu).$$

Входящие сюда постоянные C и $\tilde{x}_0$ определим из условия совпадения координат точек перегиба действительного и вспомогательного

потоков. Зная C, найдем расход $Q_в = \frac{\sqrt{K_0}Q}{CH}$, и, наконец, величины $m = \frac{\pi Q_в}{n}$ и $a = \frac{m}{V_2 - V_1}$.

Очевидно, границы вспомогательного и действительного потоков, построенные при помощи формул (10) и (11), будут мало отличаться друг от друга в переходном участке канала именно вследствие того, что точки перегиба и касательные в этих точках граничных линий данных потоков совпадают.

Поле скоростей и глубина потока находятся при помощи формул

$$V_\xi = U + \frac{m}{4a}\frac{\operatorname{sh}\mu}{D}, \quad V_\eta = -\frac{m}{4a}\frac{\sin\nu}{D}, \quad V = \sqrt{V_\xi^2 + V_\eta^2}$$

и зависимостей (6), (7).

Вертикальная составляющая скорости частиц жидкости, прилегающих к свободной поверхности, определяется формулой:

$$v_z = -\frac{v}{g}\frac{dv}{dV}\frac{1}{\Delta}\left[v_x\frac{D(V,y)}{D(\xi,\eta)} - v_y\frac{D(V,x)}{D(\xi,\eta)}\right], \quad \Delta = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)},$$

а для частиц жидкости в плоскости симметрии потока:

$$v_z = -\frac{v^2}{g}\frac{dv}{dV}\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right).$$

4. Для проверки теоретических результатов был проведен опыт в гидротехнической лаборатории ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. Исходные данные при постановке опыта ($Q = 100$ л/сек, $v_1 = 0{,}3$ м/сек, $\alpha = 24°58'51''$, $v_2 = 0{,}6\,v_{кр}$, $b_1 = 0{,}73$ м) были выбраны с целью проверки, главным образом, возможности замены точных дифференциальных уравнений движения жидкости приближенными уравнениями с принятием гидростатического закона распределения давлений по всему потоку. Наибольшее отличие опытных данных от расчетных, отнесенное для глубины потока к перепаду уровней $h_1 - h_2 = 5{,}08$ см, находилось в пределах 5%.

Ленинградский
горный институт

Поступило
3 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 1, 1948, стр. 431 и 494. [2] Н. Т. Мелещенко, Изв. ВНИИГ им. Веденеева, 36 (1948). [3] С. А. Христианович, Тр. ЦАГИ, в. 481 (1940). [4] С. А. Христианович, И. М. Юрьев, Прикладн. матем. и мех., 11, в. 1 (1947).