Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

Ю. С. ЗАВЬЯЛОВ

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛАХ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 3 V 1955)

В (1) указано, что уравнения одномерного движения газа можно свести к одному уравнению Монжа — Ампера:

$$\Phi_{\xi\xi}\Phi_{pp} - \Phi_{\xi p}^2 = \left(\frac{1}{\rho}\right)_p, \tag{1}$$

где ξ — координата Лагранжа; p — давление; ρ — плотность; $\Phi(\xi, p)$ — искомая функция такая, что скорость v, время t и координата Эйлера x найдутся по формулам

$$v = \Phi_\xi(\xi, p), \quad t = \Phi_p(\xi, p), \tag{2}$$
$$x = x(\xi, p) = \int\left\{\left(\Phi_\xi\Phi_{\xi p} + \frac{1}{\rho}\right)d\xi + \Phi_\xi\Phi_{pp}dp\right\}.$$

Случай $p = p(\xi)$ исключается.

Оказывается, что если $(1/\rho)_p = -f^2(p)$, где $f(p)$ — произвольная функция, то из дифференциальных уравнений систем характеристик для (1) (2) всегда можно получить интегралы, зависящие, кроме $f(p)$, еще от одной произвольной функции $\varphi(p)$ и постоянной A в виде:

$$\Phi(\xi, p) = \xi\left[\pm\int f(p)\,dp + A\right] + \varphi(p). \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем $(\pm)$ относятся к двум различным системам характеристик. Тогда

$$\frac{1}{\rho} = -\int f^2(p)\,dp + \psi'(\xi), \quad v = \pm\int f(p)\,dp + A, \quad t = \pm\xi f(p) + \varphi'(p),$$
$$x = \xi\left\{\int f'(p)\left[\int f(p)\,dp\right]dp \pm Af(p)\right\} \pm$$
$$\pm\int\varphi''(p)\left[\int f(p)\,dp\right]dp + A\varphi'(p) + \psi(\xi), \tag{4}$$

где $\psi(\xi)$ — произвольная функция, а штрихи означают операцию дифференцирования.

Если далее $(1/\rho)_p$ является функцией обеих независимых переменных ξ, p, то для существования интегралов типа (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_p = -\frac{f^2(\alpha)}{p+b}, \qquad \alpha = \frac{\xi + a}{p + b}, \tag{5}$$

где a и b — произвольные постоянные.

Для доказательства данного утверждения берется необходимое и достаточное условие того, что некоторая функция $V(\xi, p, \Phi, \Phi_\xi, \Phi_p) = C$ является первым интегралом уравнений одной из систем характеристик [2]. Это условие представляет собой линейную однородную дифференциальную систему двух уравнений. Такая система имеет нетривиальное решение, если в равносильной ей полной системе число уравнений меньше числа переменных. Поэтому, дополняя систему, мы всякий раз, как только число уравнений в ней достигает 5, приравниваем к нулю определитель коэффициентов. Уже на втором шаге получим полную систему из 4 уравнений. При этом на функцию $(1/\rho)_p$, входящую в коэффициенты, налагается два условия, в совокупности дающие (5). Повторяя рассуждения, аналогичные результаты получим для второй системы характеристик.

Интегрируя полученные полные системы, найдем, что

$$\Phi(\alpha, p) = \pm \int f(\alpha)\, d\alpha + (p + b)\,\varphi(\alpha) + A. \tag{3^1}$$

Тогда из (2), (5) и (3′) имеем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\alpha^3 (p+b)^3} \int \alpha^2 f^2(\alpha)\, d\alpha + \psi'[\alpha(p+b)],$$

$$v = \pm \frac{f(\alpha)}{p+b} + \varphi'(\alpha), \qquad t = \mp \frac{\alpha f(\alpha)}{p+b} - \alpha\varphi'(\alpha) + \varphi(\alpha), \tag{4^1}$$

$$x = -\frac{\alpha f^2(\alpha)}{2(p+b)} - \frac{1}{2\alpha^2 (p+b)^2} \int \alpha^2 f^2(\alpha)\, d\alpha \mp \frac{\alpha f(\alpha)\varphi'(\alpha)}{p+b} -$$

$$- \int \alpha\varphi''(\alpha)\varphi'(\alpha)\, d\alpha + \psi[\alpha(p+b)].$$

В решениях (4) и (4^1) выбором функций f и ψ мы задаем закон состояния газа. Например, из (4) при $\psi = \text{const}$ и $f(p) = \sqrt{\vartheta_0/\gamma}\, p^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}}$, где γ — показатель адиабаты, а ϑ_0 — постоянная, имеем решение для адиабатического изэнтропического движения газа. Из (4) при $b = 0$, $\psi = \text{const}$ и $f(\alpha) = f\left(\frac{\xi + a}{p}\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_1}{\gamma}} \left(\frac{\xi + a}{p}\right)^{-\frac{3\gamma-1}{2\gamma}}$, где ϑ_1 — постоянная, получаем решение для адиабатического неизэнтропического движения газа, когда функция $\vartheta(\xi) = p^{\frac{1}{\gamma}}/\rho = \vartheta_1 (\xi + a)^{-\frac{3\gamma-1}{\gamma}}$. Функция φ и постоянные определяются в этом случае из граничного и начального условий.

Если же функцию f не задавать, то можно решать задачи с двумя граничными условиями. f, φ и постоянные определяются из граничных условий. Но тогда произвол в выборе закона состояния газа сужается до выбора функции ψ.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
10 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. H. Martin, Quart. Appl. Math., 8, No. 2, 137 (1950). [2] Э. Гурса, Курс математического анализа, 3, ч. 1, 1933.