Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. ДОМБРОВСКИЙ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДОЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ БЕЗ ЦИРКУЛЯЦИИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 30 IV 1955)

1. В ([1], [2]) получены новые решения уравнений плоского установившегося потенциального течения газа, обеспечивающие высокие приближения к адиабатическому течению во всем диапазоне дозвуковых скоростей. Потенциал скорости φ и функция тока ψ представлены в виде

$$\varphi = n\,\mathrm{Re}\left[-mF + \mathrm{th}\,m(s-s_0)\frac{dF}{d\zeta}\right],$$
$$\psi = n^{-1}\,\mathrm{Im}\left[-mF + \mathrm{cth}\,m(s-s_0)\frac{dF}{d\zeta}\right]. \tag{1}$$

Здесь величина s связана с модулем скорости и плотностью определенными соотношениями ([2], [3]); $\zeta = s - i\vartheta$, где ϑ — угол наклона вектора скорости; F — произвольная аналитическая функция ζ; n, m и s_0 — произвольные постоянные. В дальнейшем для сокращения записи будем применять также переменные $V = e^s$ и $s_1 = s - s_0$.

Для определения плотности ρ и скорости v даны формулы

$$\rho = \frac{Ae^{2s_1}(m\,\mathrm{th}\,ms_1 - 1) + (m\,\mathrm{th}\,ms_1 + 1)}{n^2\,\mathrm{th}\,ms_1\,[Ae^{2s_1}(\mathrm{th}\,ms_1 - m) + (\mathrm{th}\,ms_1 + m)]}, \tag{2}$$

$$v = \frac{Bn^2 e^{s_1}\,\mathrm{th}\,ms_1}{Ae^{2s_1}(m\,\mathrm{th}\,ms_1 - 1) + (m\,\mathrm{th}\,ms_1 + 1)}, \tag{3}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Установлена также формула для перехода к физической плоскости течения газа Z:

$$\frac{nB}{1-m^2}Z = \sigma_1\frac{V_0}{e^\zeta}\frac{dF}{d\zeta} + \sigma_2\overline{\frac{e^\zeta}{V_0}\frac{dF}{d\zeta}} + \int\frac{V_0}{e^\zeta}\frac{dF}{d\zeta}d\zeta + A\int\overline{\frac{e^\zeta}{V_0}\frac{dF}{d\zeta}}\,d\zeta, \tag{4}$$

где $V_0 = e^{s_0}$ и σ_1, σ_2 — известные функции s_1:

$$\sigma_1 = \frac{Be^{s_1}}{2(1-m^2)}\left(n^2\,\mathrm{th}\,ms_1 + \frac{\mathrm{cth}\,ms_1}{\rho}\right)\frac{1}{v},$$
$$\sigma_2 = \frac{Be^{-s_1}}{2(1-m^2)}\left(n^2\,\mathrm{th}\,ms_1 - \frac{\mathrm{cth}\,ms_1}{\rho}\right)\frac{1}{v}. \tag{5}$$

Осуществляя в заданной точке $\rho = \rho^*$ третий порядок касания адиабаты и кривой $p = p(\rho)$, аппроксимирующей адиабату в плоскости

давление — плотность, легко получаем следующие соотношения для определения постоянных m, n и A:

$$\frac{m}{n}=\left\{\frac{\left(2\rho K_{\text{ад}}+\rho^2\frac{dK_{\text{ад}}}{d\rho}\right)\frac{dK_{\text{ад}}}{d\rho}+(1-\rho^2K_{\text{ад}})\left[\frac{5}{4K_{\text{ад}}}\left(\frac{dK_{\text{ад}}}{d\rho}\right)^2-\frac{d^2K_{\text{ад}}}{d\rho^2}\right]}{2K_{\text{ад}}^{3/4}\frac{dK_{\text{ад}}}{d\rho}}\right\}_{\rho=\rho^*}, \tag{6}$$

$$mn=\left[\frac{1-\rho^2K_{\text{ад}}}{4K_{\text{ад}}^{5/4}}\frac{dK_{\text{ад}}}{d\rho}+\frac{m}{n}K_{\text{ад}}^{1/2}\right]_{\rho=\rho^*}, \tag{7}$$

$$A=\left[\left(\frac{n+K_{\text{ад}}^{1/4}}{n-K_{\text{ад}}^{1/4}}\right)^{1/m}\frac{(n-mK_{\text{ад}}^{1/4})+n\rho K_{\text{ад}}^{1/4}(mn-K_{\text{ад}}^{1/4})}{(n+mK_{\text{ад}}^{1/4})+n\rho K_{\text{ад}}^{1/4}(mn+K_{\text{ад}}^{1/4})}\right]_{\rho=\rho^*}, \tag{8}$$

где $K_{\text{ад}}$ — функция Чаплыгина для адиабатического течения газа ([3,4]). Величина B определяется из условия $v^*=v^*_{\text{ад}}$ при $\rho=\rho^*$, где $v_{\text{ад}}$ — скорость адиабатического течения.

Когда $\rho^*\to 1$,

$$m\to 2,\quad n\to 1,\quad A\to -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}, \tag{9}$$

где γ — показатель адиабаты. В общем случае $m\geqslant 2$.

2. Приложим решения (1) к построению дозвуковых потоков около профилей в случае, когда циркуляция скорости по замкнутому контуру, охватывающему профиль, равна нулю.

Как и в работах ([3–7]), поставим течению газа в соответствие некоторое течение несжимаемой жидкости со скоростью в бесконечности V_∞. Для этого введем функцию w при помощи соотношения

$$F=-\frac{V_\infty}{mn}\left(w^{\frac{1}{n}}-e^{-m\hat{\vartheta}}\int_{\hat{\vartheta}'}^{\hat{\vartheta}}e^{m\hat{\vartheta}}\frac{dw}{d\hat{\vartheta}}d\hat{\vartheta}\right) \tag{10}$$

и будем рассматривать $V_\infty w$ как характеристическую функцию известного течения несжимаемой жидкости в новой плоскости z, причем условием

$$e^{\hat{\vartheta}}=V_\infty\frac{dw}{dz} \tag{11}$$

установим связь между z и $\hat{\vartheta}$. Дальше для сокращения будем применять обозначение $\zeta=dw/dz$.

После подстановки (10) и (11) в (1) имеем:

$$\begin{aligned}\varphi&=V_\infty\,\mathrm{Re}\left(w-q_1e^{im\vartheta}\int_{z'}^{z}\zeta^{m+1}dz\right),\\ \psi&=n^{-2}\,V_\infty\,\mathrm{Im}\left(w-q_2e^{im\vartheta}\int_{z'}^{z}\zeta^{m+1}dz\right),\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$q_1=(1+\operatorname{th}ms_1)\frac{V_\infty^m}{V^m},\quad q_2=(1+\operatorname{cth}ms_1)\frac{V_\infty^m}{V^m} \tag{13}$$

и нижний предел z' — произвольная комплексная постоянная, соответствующая постоянной ζ'.

Аналогично преобразовываем (4) к виду

$$cZ = z + \lambda \int \overline{\zeta^2 dz} + \lambda_1 e^{i(1-m)\vartheta} \int_{z'}^{\bar{z}} \overline{\zeta^{m+1} dz} + \lambda_2 e^{i(1+m)\vartheta} \int_{z'}^{z} \zeta^{m+1} dz, \qquad (14)$$

где

$$c = \frac{n^2 B}{(m-1)V_0}, \quad \lambda = A\,\frac{m+1}{m-1}\,\frac{V_\infty^2}{V_0^2}, \qquad (15)$$

$$\lambda_1 = (m+1)\,\frac{V_\infty^2}{V_0^2}\left(\sigma_2 - \frac{A}{m-1}\right)\frac{V_\infty^{m-1}}{V^{m-1}}, \quad \lambda_2 = (m+1)\left(\sigma_1 - \frac{1}{m+1}\right)\frac{V_\infty^{m+1}}{V^{m+1}}.$$

При помощи (14) устанавливается соответствие между плоскостью течения несжимаемой жидкости и плоскостью течения газа. Если в плоскости z известно обтекание без циркуляции некоторого профиля несжимаемой жидкостью, то, используя (12) и (14), можно построить в плоскости Z обтекание газом профиля, близкого к исходному. Как видно из (12), циркуляция скорости по замкнутому контуру, охватывающему полученный в плоскости Z профиль, также равна нулю.

Профиль, обтекаемый газом, отличается от исходного профиля за счет влияния добавочных членов в (12) и (14). Определяя число M из равенства

$$M^2 = 1 - K\rho^2, \quad K = (n \operatorname{th} ms_1)^4, \qquad (16)$$

где K — введенная в ([1],[2]) функция Чаплыгина, получаем на основании (2), (5), (13) и (15), что при $M_\infty \to 0$ величины q_1, q_2 и λ_1 имеют порядок малости M_∞^{2m} и величины λ и λ_2 — порядок малости, соответственно, M_∞^2 и M_∞^{2m+2}. Таким образом, когда $M_\infty \to 0$, течение газа становится сколь угодно близким к исходному течению несжимаемой жидкости.

Масштабный множитель c равен единице, если положить

$$V_0 = \frac{n^2 B}{m-1}. \qquad (17)$$

При этом будет удовлетворяться известное требование

$$\lim_{V \to 0} \frac{v}{V} = 1. \qquad (18)$$

Если пренебрегать членами, порядок малости которых равен и выше, чем M_∞^{2m}, то (2), (3), (12) и (14) обращаются в формулы приближенного метода С. А. Чаплыгина.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
20 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Домбровский, Сборн. ст. под ред. Л. И. Седова, Теоретическая гидромеханика, № 9, в. 2 (1952). [2] Г. А. Домбровский, ДАН, **103**, № 1 (1955). [3] С. А. Чаплыгин, О газовых струях, 1949. [4] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 1950. [5] Th. Karman, J. Aer. Sci., 8, No. 9 (1941). [6] H. S. Tsien, J. Aer. Sci., 6, No. 10 (1939). [7] M. J. Lighthill, Proc. Roy. Soc., **A 191**, No. 1026 (1947).