Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

*МЕХАНИКА*

Д. И. МАНЖЕРОН

# К ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ КИНЕМАТИКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

*(Представлено академиком А. И. Некрасовым 11 I 1955)*

1. К задаче о распределении ускорений любого порядка в плоскопараллельном движении материальных систем относится ряд теорем, основанных на следующих положениях:

Теорема 1. *Пусть, в матричных обозначениях,* $P_n(x_{1P_n},\ x_{2P_n})$,

$$\begin{Bmatrix} x_{1P_n} \\ x_{2P_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} + \frac{1}{A_n^2 + B_n^2} \begin{Bmatrix} A_n & -B_n \\ B_n & A_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{10}^{(n+1)} \\ x_{20}^{(n+1)} \end{Bmatrix} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

*есть полюс ускорений n-го порядка в плоско-параллельном движении материальной неизменяемой системы, где* $A_n = A_n(t)$, $B_n = B_n(t)$ *определяются рекуррентными формулами*

$$A_n = A_{n-1} + \dot{\theta} B_{n-1}; \quad B_n = B_{n-1} - \dot{\theta} A_{n-1}; \quad A_1 = \dot{\theta}^2; \quad B_1 = \ddot{\theta}; \quad \theta = \theta(t);$$

$$x_{i0}^{(n+1)} = \frac{d^{n+1} x_{i0}}{dt^{n+1}} \quad (i = 1,\ 2; \quad n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2}$$

*и* $\theta_n = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{B_n}{A_n}$ *— угол (один и тот же в данный момент времени для всех точек системы), образуемый ускорением n-го порядка* $\overline{W}_M^{(n)}$ $(\overline{W}^{(1)} = \overline{W})$ *некоторой точки M системы с лучом* $MP_n$. *Геометрическое место точек, в которых ускорения n-го порядка, выраженные формулами Сомова* [1]

$$\begin{Bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10}^{(n+1)} \\ x_{20}^{(n+1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -A_n & -B_n \\ B_n & -A_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & -x_{10} \\ x_2 & -x_{20} \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

*пересекаются в точке P, является окружностью K с центром* $C_n(x_{1C_n},\ x_{2C_n})$,

$$\begin{Bmatrix} x_{1C_n} \\ x_{2C_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2B_n} \begin{Bmatrix} B_n & A_n \\ -A_n & B_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1P} & -x_{10} \\ x_{2P} & -x_{20} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2B_n} \begin{Bmatrix} -x_{20}^{(n+1)} \\ x_{10}^{(n+1)} \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

*и радиусом* $R_n$:

$$R_n^2 = \frac{1}{4B_n^2} \left[ (A_n^2 + B_n^2)\,(\overline{r}_P - \overline{r}_0)^2 - 2\,(\overline{r}_P - \overline{r}_0) \left( \begin{Bmatrix} A_n & -B_n \\ B_n & A_n \end{Bmatrix} \overline{r}_0^{(n+1)} \right) \right]. \tag{5}$$

*Имеет место соотношение*

$$\sphericalangle P_n C_n P = 2\theta_n = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{B_n}{A_n}.$$

Теорема 2. *Если точка P описывает произвольную замкнутую кривую* $C_P$, *то геометрическое место точек центров* $C_n$ *совокупности окружностей K, соответствующих точкам P, есть замкнутая кривая* $C_{C_n}$, *подобная* $C_P$, *с центром подобия* $P_n$ *и отношением*

*подобия* $1:2\sin\theta_n$, *повернутая на угол* $\frac{\pi}{2}-\theta_n$ *по отношению к* $C_P$ *в направлении* $\theta_n$.

Теорема 3. *Пусть* $C_P$ *— окружность, содержащая* $P_n$. *Огибающая однопараметрического семейства окружностей* $K$, *центры которых находятся на окружности* $C_P$, *— кардиоида, имеющая основанием окружность* $C_{C_n}$ *и вершину* $P_n$.

Теорема 4. *Геометрическое место точек, в которых проекции ускорений n-го порядка на касательную или нормаль к траектории равны нулю, — окружности, проходящие через мгновенные центры (полюсы) скоростей и ускорений n-го порядка.*

Теорема 5. *Геометрическое место концов «приведенных ускорений n-го порядка», определяемых отношением* $\frac{\overline{W}^{(n)}}{A_n}$ (*см. теорему* 1, (2)), *точек прямой* $(D_0)$ *есть прямая* $(D_1)$, *перпендикулярная к данной.*

Теорема 6. *Геометрическое место концов приведенных ускорений n-го порядка точек окружности диаметра* $H_{i-1}H_i$, *где* $H_i$ *— точка пересечения прямых* $(D_i)$, $(D_{i-1})$, *построенных в результате последовательного применения теоремы* 5 *к прямым* $(D_0)$, $(D_1)$, $(D_2)$ *и т. д., есть окружность диаметра* $H_iH_{i+1}$. *Совокупность окружностей диаметров* $H_jH_{j+1}$ $(j=1, 2, \ldots)$ *проходит через мгновенный центр ускорений n-го порядка* $P_n$.

2. Из вышеизложенных теорем выводится обширный ряд аналогий и унифицирующих результатов, представляющих интерес для теории механизмов и графо-аналитической кинематики (2) и доказывается затем несколько теорем, касающихся ускорений $n$-го порядка точек материальных неизменяющихся систем, движущихся в трехмерном пространстве.

Полученные результаты обобщаются на случай плоско-параллельного движения материальных деформирующихся при движении, но сохраняющих подобие систем и на случаи «движений», выраженных аффинными преобразованиями

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{j0} \end{Bmatrix} + \{M(t)\} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_j' \end{Bmatrix} \tag{6}$$

в пространствах 2, 3 и т. д. измерений, где матрица

$$\{M(t)\} = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1j}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2j}(t) \\ & \ldots & & \\ a_{j1}(t) & a_{j2}(t) & \ldots & a_{jj}(t) \end{Vmatrix}$$

и определитель $\| M(t) \| = 1$ или же $\neq 1$ и $\neq 0$.

Ясский политехнический институт
Яссы, Румынская Народная Республика

Поступило
27 XII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Манжерон, ДАН, **102**, № 4 (1955). [2] См., например, Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье, Курс теоретической механики, **1**, М., 1954, стр. 290—294.