Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 III 1955)

Речь идет о следующей проблеме:

Каковы должны быть числа M_{kp} $(k, p = 0, 1, 2, \ldots)$, *чтобы из неравенств*

$$|x^k \varphi^{(p)}(x)| \leqslant CA^k B^p M_{kp}, \tag{1}$$

выполненных для некоторой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ *при* $-\infty < x < \infty$, *вытекало, что* $\varphi(x) \equiv 0$?

Мы приводим здесь решение этой проблемы в предположении, что числа M_{kp} имеют вид $k^{k\alpha} p^{p\beta}$, где α и β — фиксированные неотрицательные числа. Класс всех функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k \varphi^{(p)}(x)| \leqslant CA^k B^p k^{k\alpha} p^{p\beta} \tag{2}$$

при некоторых A, B и C (зависящих от $\varphi(x)$), обозначим S_α^β.

Теорема. *Класс* S_α^β *тривиален, т. е. состоит из одной единственной функции* $\varphi(x) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда числа* α *и* β *удовлетворяют одному из следующих трех условий:*

а) $\alpha = 0$, $\beta \leqslant 1$;

б) $\alpha \leqslant 1$, $\beta = 0$;

в) $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$.

Доказательство. При $\alpha = 0$ из неравенств (2) вытекает, что

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leqslant CB^p p^{p\beta} \inf_k \frac{A^k}{|x|^k} = CB^p p^{p\beta} \cdot \begin{cases} 1 \text{ при } |x| \leqslant A, \\ 0 \text{ при } |x| > A. \end{cases}$$

В силу классического критерия Карлемана — Островского (1) необходимым и достаточным условием тривиальности класса S_0^β является выполнение неравенства $\beta \leqslant 1$.

При $\alpha > 0$ аналогичная выкладка приводит к неравенству

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leqslant CB^p p^{p\beta} \inf_k \frac{A^k k^{k\alpha}}{|x|^k} = CB^p p^{p\beta} e^{-A_1 |x|^{1/\alpha}}. \tag{3}$$

Если $\beta < 1$, то функция $\varphi(x)$ может быть аналитически продолжена в комплексную плоскость $z = x + iy$. При этом получается оценка

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} |\varphi^{(p)}(x)| \frac{|y|^p}{p!} \leqslant Ce^{-A_1 |x|^{1/\alpha}} \sum_{p=0}^{\infty} B^p \frac{p^{p\beta}}{p!} |y|^p \leqslant$$

$$\leqslant C_1 e^{-A_1 |x|^{1/\alpha} + B_1 |y|^{1/(1-\beta)}}. \tag{4}$$

Мы видим, что $\varphi(z)$ есть целая аналитическая функция порядка роста не выше $\frac{1}{1-\beta}$. Если $\alpha+\beta<1$, то $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{1-\beta}$, и в силу теоремы Фрагмена — Линделефа о минимуме индикатрисы ([2]) $\varphi(x)\equiv 0$. Если $\alpha=1$, $\beta=0$, то также $\varphi(x)\equiv 0$ ([3]). Вообще, легко проверяемое равенство $\widetilde{S_\alpha^\beta}=S_\beta^\alpha$ ($\sim$ означает преобразование Фурье) показывает, что условие $\alpha\leqslant 1$ является необходимым и достаточным условием тривиальности класса S_α^0.

Поскольку очевидно, что $\alpha\leqslant\alpha'$, $\beta\leqslant\beta'$ влечет $S_\alpha^\beta\subset S_{\alpha'}^{\beta'}$, нам остается проверить, что при $\alpha+\beta=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$ класс S_α^β содержит функцию, отличную от нуля.

Известно, что класс Z_q^q ($q>1$), состоящий из целых функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих неравенствам (все постоянные C_2, C_3, ... положительны)

$$|\varphi(z)|\leqslant C_2e^{C_3|z|^q},\quad |\varphi(x)|\leqslant C_2e^{-C_4|x|^q},$$

содержит отличные от нуля функции. (Для всюду плотного множества значений q это доказано в ([4]). Для любого $q\leqslant 2$ это вытекает из теоремы Вл. Бернштейна (см. ([5]); более простое доказательство см. ([7])) о существовании целой функции заданного порядка роста q с заданной тригонометрически выпуклой индикатрисой $h(\vartheta)$; в рассматриваемом случае в качестве такой индикатрисы можно взять, например, периодическое (с периодом π) продолжение функции $\dfrac{\cos q\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)}{-\cos q\frac{\pi}{2}}$ $(0\leqslant\vartheta\leqslant\pi)$. Переход к $q>2$ осуществляется при помощи замены z на z^{2m} при подходящем m.) Покажем, что при $q=\frac{1}{\alpha}$ $Z_q^q\subset S_\alpha^{1-\alpha}$. (Из (4) вытекает обратное включение, так что в действительности $Z_q^q=S_\alpha^{1-\alpha}$.)

Пусть $\varphi(z)\in Z_q^q$. При $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$ индикатриса $h_\varphi(\vartheta)$ отрицательна; в силу ее непрерывности существует сектор $|y|\leqslant\frac{1}{k}|x|$, в котором имеет место неравенство $|\varphi(z)|\leqslant C_5e^{-C_6|z|^q}$. Положим, что $M(y)=\sup\limits_x|\varphi(x+iy)|e^{C_6|x|^q}$; эта верхняя грань достигается вне сектора $|y|\leqslant\frac{1}{k}|x|$, по крайней мере для достаточно больших $|y|$, так что в экстремальной точке

$$|x|<k|y|,\quad |z|<\sqrt{1+k^2}|y|,\quad M(y)\leqslant C_2e^{C_3|z|^q+C_6|x|^q}\leqslant C_2e^{C_7|y|^q}.$$

Отсюда, уже при всех x и y:

$$|\varphi(x+iy)|e^{C_6|x|^q}\leqslant M(y)\leqslant C_2e^{C_7|y|^q},$$

и, следовательно,

$$|\varphi(x+iy)|\leqslant C_2e^{C_7|y|^q-C_6|x|^q}. \tag{5}$$

Пусть теперь a — любое вещественное число; покажем, что существуют постоянные C_8 и C_9, не зависящие от a, x, y, такие, что для всех x, y и a выполняется неравенство

$$C_7|y|^q-C_6|x|^q\leqslant -C_8|a|^q+C_9|x+iy-a|^q. \tag{6}$$

Предполагая противное, для любого n мы сможем указать числа x_n, y_n и a_n, удовлетворяющие неравенству

$$C_7|y_n|^q-C_6|x_n|^q>-\frac{1}{n}|a_n|^q+n|x_n+iy_n-a_n|^q. \tag{7}$$

Положим $\xi_n = \left|\frac{x_n}{a_n}\right|$, $\eta_n = \left|\frac{y_n}{a_n}\right|$; неравенство (7) перейдет в неравенство

$$\frac{1}{n} > C_6\xi_n^q + n\left[(\xi_n - 1)^2 + \eta_n^2\right]^{q/2} - C_7\eta_n^q > C_6\xi_n^q + \frac{n}{2}\eta_n^q > 0 \qquad (8)$$

при достаточно большом n, откуда $\xi_n \to 0$, $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но первое из неравенств (8) показывает, что это невозможно. Таким образом, существование постоянных C_8 и C_9 установлено.

Для вычисления производных от $\varphi(x)$ в точке $x = a$ применим формулу Коши

$$\varphi^{(p)}(a) = \frac{p!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^{p+1}},$$

где Γ — окружность радиуса R с центром в a. Отсюда, учитывая (5) и (6), находим

$$|\varphi^{(p)}(a)| \leqslant C_2 p! e^{-C_8|a|^q}\frac{1}{R^p}e^{C_9R^q},$$

и, переходя к минимуму по R,

$$|\varphi^{(p)}(a)| \leqslant C_2 e^{-C_8|a|^q}\cdot C_{10}^p p^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)p_m},$$

что эквивалентно (2) при $\alpha = 1 - \beta = \frac{1}{q}$. Теорема доказана.

Для потребностей теории дифференциальных уравнений целесообразно рассматривать линейные топологические пространства, образованные из функций $\varphi(x) \in S_\alpha^\beta$. Обозначим через $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ совокупность всех функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих при любых ε и δ неравенствам вида

$$|x^k\varphi^{(p)}(x)| \leqslant C_\varphi(\varepsilon, \delta)(A+\delta)^k k^{k\alpha}(B+\varepsilon)^p p^{p\beta}.$$

Очевидно, $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ — линейное пространство. Введем в него топологию при помощи системы норм

$$N_{\varepsilon\delta}(\varphi) = \sup_{k,\,p,\,x}\frac{|x^k\varphi^{(p)}(x)|}{(A+\delta)^k k^{k\alpha}(B+\varepsilon)^p p^{p\beta}},$$

так что окрестности нуля задаются неравенствами

$$N_{\varepsilon_1\delta_1}(\varphi) < a_1, \quad N_{\varepsilon_2\delta_2}(\varphi) < a_2, \ \ldots, \ N_{\varepsilon_m\delta_m}(\varphi) < a_m.$$

Ограниченные множества в $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ — такие совокупности функций $\varphi(x)$, на которых каждая из норм ограничена (своей постоянной). Последовательность $\varphi_n(x)$ стремится к нулю (в смысле введенной топологии) тогда и только тогда, когда она ограничена в $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ и функции $\varphi_n^{(p)}(x)$ при любом фиксированном p и $n \to \infty$ равномерно сходятся к нулю на каждом конечном промежутке. Каждое ограниченное множество в $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ компактно, так что, по терминологии Дьедонне и Шварца ([6]), есть пространство типа M (пространство Монтеля).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, М. — Л., 1937, гл. I. [2] Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, в. XXIV, 115 (1949). [3] Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, I, 1937, стр. 177, задача 327. [4] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 8, № 6 (58), гл. I, § 4 (1953). [5] VI. Bernstein, Mem. Reale Acc. d'Italia, 7, 131 (1936). [6] J. Dieudonné, L. Schwartz, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble, 1, 1949, 79 (1950). [7] Б. Я. Левин, Матем. сборн., 2 (44), 1097 (1937).