Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

МАТЕМАТИКА

Э. Э. ТАММЕ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 V 1955)

Пусть требуется найти приближенное решение функционального уравнения

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где $y = P(x)$ есть (в некоторой окрестности точного решения x^*) аналитический оператор из банахова пространства X в пространство Y того же типа, имеющий в окрестности решения x^* обратный оператор $x = P^{-1}(y) = \Phi(y)$.

Если мы знаем достаточно близкое начальное приближение решения, то можем найти искомое решение с желаемой точностью, используя разложение обратного оператора в степенной ряд в точке $y_0 = P(x_0)$

$$x^* = \Phi(0) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Phi^{(k)}(y_0)\,[P(x_0)]^k. \tag{2}$$

Этот метод для решения алгебраических уравнений рассматривали Л. Эйлер (1), П. Л. Чебышев (2) и многие другие. Распространение метода на функциональные уравнения дано в работе М. И. Нечепуренко (3).

В настоящей заметке даются условия сходимости ряда (2) к решению уравнения (1) и оценки для погрешности, если ограничиться частными суммами ряда (2).

Прежде всего докажем теорему о существовании и аналитичности обратного оператора.

Теорема 1. *Если оператор $y = P(x)$ аналитичен в окрестности точки x_0 и существует линейный оператор $[P'(x_0)]^{-1} = \Gamma$, то существует обратный оператор $x = P^{-1}(y) = \Phi(y)$, аналитический в некоторой окрестности точки $y_0 = P(x_0)$.*

При этом, если предположены оценки

$$\|\Gamma(y - y_0)\| \leqslant \eta(y) \quad (y \in Y) \quad \text{и} \quad \frac{1}{k!}\|\Gamma P^{(k)}(x_0)\| \leqslant HA^{k-2} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

то имеем:

$$\frac{1}{n!}\|\Phi^{(n)}(y_0)(y - y_0)^n\| \leqslant H[\eta(y)]^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k}\binom{n-2}{k} A^{n-2-k}H^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{H[\eta(y)]^n}{n-1}(2A + 4H)^{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

(*в последней части этого неравенства следует писать знак* $=$ *при* $n=2,\ 3$ *и знак* $<$ *при* $n=4,\ 5,\ldots$).

Доказательство. Учитывая результаты М. К. Гавурина ([4]) об аналитических операторах и теорему о неявных операторах ([5]), видим, что из условий настоящей теоремы следует существование и бесконечнократная дифференцируемость обратного оператора Φ в некоторой окрестности точки y_0. В этой окрестности можем выразить дифференциалы обратного оператора Φ при помощи производных оператора P (см., например, ([3])). Оценивая полученные дифференциалы, можем индуктивно доказать оценки (3).

При помощи оценок (3) уже нетрудно доказать аналитичность оператора Φ в некоторой окрестности точки y_0. Для этого используем достаточные условия аналитичности оператора (([4]), стр. 144), которые являются и необходимыми. Вследствие необходимости этих условий можем оценить производные оператора P в некоторой окрестности точки x_0 и поэтому применить оценки (3) для некоторой окрестности точки y_0. Этим завершается доказательство теоремы.

Обозначим через x_n частные суммы ряда (2):

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,\Phi^{(k)}(y_0)\,[P(x_0)]^k \quad (n=1,2,\ldots). \tag{4}$$

Применимость формулы (4) для вычисления приближений к точному решению устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1°. $\|\Gamma P(x_0)\| \leqslant \eta$, *где* $\Gamma = [P'(x_0)]^{-1}$.

2°. $\frac{1}{k!}\|\Gamma P^{(k)}(x_0)\| \leqslant HA^{k-2}$ $(k=2,3,\ldots)$.

3°. *Постоянные* η, H *и* A *удовлетворяют неравенству*

$$m = 2\eta(2H+A) < 1.$$

4°. *В сфере*

$$\|x - x_0\| < \eta + \zeta, \tag{5}$$

где $\zeta = -\frac{H\eta^2}{m}\ln(1-m) < \frac{H\eta^2}{1-m}$, *существует линейный обратный оператор* $[P'(x)]^{-1}$.

5°. *Оператор* P *аналитичен в сфере* (5).

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* (5) *единственное решение* x^*, *к которому сходится процесс* (4) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| < \frac{H\eta^2}{1-m}\,\frac{m^{n-1}}{n} \quad (n=1,2,\ldots), \tag{6}$$

или, точнее,

$$\begin{gathered} \|x^* - x_1\| < \zeta, \\ \|x^* - x_n\| < \zeta - H\eta^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{m^{k-1}}{k} \quad (n=2,3,\ldots). \end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что все точки отрезка

$$y = \theta y_0 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1) \tag{8}$$

находятся в звезде сходимости степенного ряда

$$\Phi(y) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Phi^{(k)}(y_0)(y - y_0)^k$$

и что этот ряд сходится во всех точках отрезка (8) к некоторой точке сферы (5). Именно, используя оценки (3) и условия теоремы, получаем

$$\| \Phi(0y_0) - x_0 \| < \eta + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{H\eta^k}{n-1} (2A + 4H)^{k-2} = \eta + \zeta.$$

Из условий 4° и 5° в силу теоремы 1 вытекает аналитичность обратного оператора Φ на всем отображении (которое является открытым множеством) сферы (5) оператором P. Используя теорему об аналитических операторах ([4], стр. 142), получим, что отрезок (8) находится в отображении сферы (5). Из этого следует существование и единственность решения уравнения (1) в сфере (5) и также сходимость процесса (4) к этому решению.

Используя формулы 3 для оценки нормы $\| x^* - x_n \| (n = 1, 2, \ldots)$, легко получить неравенства (6) и (7), чем теорема 2 и доказана.

Замечание. Условие 4° этой теоремы можно заменить более сильным требованием, что $[H + A + \sqrt{H(H+A)}](\eta + \zeta) \leqslant 1$.

Для того чтобы облегчить вычисление приближенных решений x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, обозначим

$$\Delta x_n = (-1)^n \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(y_0)[P(x_0)]^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда $x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, причем (используя понятие пространства X^k ([4]))

$$\Delta x_1 = -\Gamma P(x_0),$$

$$\Delta x_n = -\Gamma \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0) \sum_{\substack{i_1 + \ldots + i_{n-1} = k \\ 1 i_1 + \ldots + (n-1) i_{n-1} = n}} \frac{k!}{i_1! \ldots i_{n-1}!} \Delta x_1^{i_1} \ldots \Delta x_{n-1}^{i_{n-1}}$$

$(n = 2, 3, \ldots)$, где i_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ — неотрицательные целые числа.

Ниже приводим два примера, которые иллюстрируют скорость сходимости метода (4) и точность оценки (6). Применение этого метода сходно применению метода Л. В. Канторовича и других аналогичных методов (см., например, ([3, 6–9])), но вычисления часто оказываются значительно проще.

В примерах взято $X = Y = C(a, b)$.

Пример 1. При решении интегрального уравнения

$$x(s) = 0{,}05s \int_0^1 t\,[x(t)]^2\,dt + 3 + 0{,}6625\,s,$$

взяв начальное приближение $x_0(s) = 3{,}5$, получаем следующие результаты:

n	$x_n(s)$	Оценка (6)
1	$3 + 0{,}997\,6\,s$	$7{,}6 \cdot 10^{-3}$
2	$3 + 0{,}999\,978\,s$	$2{,}2 \cdot 10^{-4}$
3	$3 + 0{,}999\,999\,7s$	$8{,}1 \cdot 10^{-6}$
4	$3 + 1{,}000\,000\,0s$	$4 \cdot 10^{-7}$
5	$3 + 1{,}000\,000\,0s$	$2 \cdot 10^{-8}$

Точное решение этого уравнения $x^*(s) = 3 + s$.

Пример 2. Если в граничной задаче

$$x''(s) + 0{,}25 \sin x(s) = \beta \sin s,$$
$$x(0) = x(\pi) = 0$$

взять в качестве начального приближения $x_0(s) = 0$, то при $|\beta| \leqslant 0{,}5$ теорема 2 обеспечивает сходимость процесса к точному решению со скоростью

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant \pi} |x^*(s) - x_n(s)| < \frac{0{,}333\,|\beta|^2\,(1{,}99\,|\beta|)^{n-1}}{1 - 1{,}99|\beta|} \cdot \frac{}{n}.$$

Результаты вычисления следующие:

$$x_1(s) = x_2(s) = -\frac{4}{3} \sin s,$$

$$x_3(s) = x_4(s) = x_2(s) + \frac{8}{81}\beta^3 \left(\sin s - \frac{1}{35} \sin 3s\right),$$

$$x_5(s) = x_6(s) = x_4(s) - \frac{8}{25515}\beta^5 \left(94 \sin s - \frac{109}{35} \sin 3s + \frac{1}{11} \sin 5s\right).$$

Если, например, $\beta = 0{,}1$, то для $s = \pi/2$ получаем:

n	$x_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$	Оценка (6)
1,2	$-0{,}133\,33$	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$
3,4	$-0{,}133\,231\,7$	$8{,}3 \cdot 10^{-6}$
5,6	$-0{,}133\,232\,05$	$2{,}3 \cdot 10^{-7}$

Тартуский государственный университет

Поступило 17 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, 1949. [2] П. Л. Чебышев, Собр. соч., 5, 1951, стр. 7—25. [3] М. И. Нечепуренко, Усп. матем. наук, 9, в. 2, 163 (1954). [4] М. К. Гавурин, Уч. зап. ЛГУ, в. 19 (№ 137), 59 (1950). [5] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, 1951. [6] Л. В. Канторович, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 28, 104 (1949). [7] И. П. Мысовских, Вестн. Ленинградск. унив., 9, № 8, № 11, 25 (1953). [8] Н. Н. Глинская, И. П. Мысовских, Вестн. Ленинградск. унив., 9, 49 (1954). [9] М. А. Мертвецова, Сходимость некоторых итерационных процессов в различных функциональных пространствах, Диссертация, КГУ, 1953.