Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. Ф. МИЩЕНКО и член-корреспондент АН СССР Л. С. ПОНТРЯГИН

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, БЛИЗКИЕ К РАЗРЫВНЫМ

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x}^i &= f^i(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l), \quad i = 1, \ldots, k; \\ \dot{y}^j &= g^j(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l), \quad j = 1, \ldots, l, \end{aligned} \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, или, в векторной форме:

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \tag{1'}$$

Предполагается, что соответствующая вырожденная система

$$f(x, y) = 0, \quad \dot{y} = g(x, y) \tag{2}$$

имеет устойчивое разрывное периодическое решение и что каждое решение системы уравнений

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y_0), \tag{3}$$

где y_0 — постоянный вектор, стремится с возрастанием времени к одному из своих положений равновесия.

Фазовое пространство системы (1) есть $k + l$-мерное евклидово пространство R, являющееся прямой суммой k-мерного пространства X и l-мерного пространства Y. Если считать фазовые траектории системы (2) пределами фазовых траекторий системы (1) при $\varepsilon \to 0$, то нетрудно описать в общих чертах движение представляющей точки системы (2) в пространстве R и, в частности, понять, что такое разрывное решение системы (2), как это было сделано в работе [1]. Опишем траекторию, соответствующую разрывному решению системы (2). Такая траектория состоит из чередующихся кусков двух типов: а) кусков «медленных» движений, лежащих на l-мерной поверхности F пространства R, уравнение которой $f(x, y) = 0$, и проходимых представляющей точкой в конечное время; б) кусков «быстрых» движений, каждый из которых лежит в некотором k-мерном подпространстве пространства R, выделяемом уравнением $y = \text{const}$, и проходимых представляющей точкой мгновенно. Переход от медленного движения к быстрому происходит в точках «срыва». Уравнение $f(x, y_0) = 0$ выделяет, очевидно, в пространстве R совокупность всех положений равновесия системы (3); поэтому поверхность F представляет собой множество всех положений равновесия всех систем (3) при различных y_0. Медленное движение вдоль поверхности F есть движение устойчивого положения равновесия системы (3) при меняющемся y_0. Предполагается, что срыв происходит при слиянии устойчивого положения равновесия с неустойчивым, причем возникшее при слиянии вырож-

денное положение равновесия имеет «общий тип», в частности, лишь одно нулевое собственное значение. После срыва точка перемещается в плоскости $y = \text{const}$ быстрых движений, переходя к новому устойчивому положению равновесия, а затем возобновляет свое движение по поверхности F. Совокупность точек срыва всех траекторий системы (2) образует $l-1$-мерную поверхность срыва Ф. Ее уравнение

$$f(x, y) = 0, \quad D(x, y) = 0, \tag{4}$$

где $D(x, y)$ — якобиан $\left|\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}\right|$. Периодическое движение z_0 системы (2) состоит из конечного числа кусков, для определенности — из четырех: $u_1 = (p_2, s_1)$, $u_2 = (p_1, s_2)$ — куски медленных движений, а $v_1 = (s_1, p_1)$, $v_2 = (s_2, p_2)$ — куски быстрых движений; s_1 и s_2 — точки срыва.

В настоящей работе отыскивается с точностью до $O(\varepsilon)$ периодическое решение z системы (1), близкое к периодическому решению z_0 системы (2), и вычисляется его период. Для системы уравнений второго порядка решение z нами вычислено до $O(\varepsilon^{4/3})$. В одном частном случае таких систем (уравнение Ван-дер-Поля) этот результат получен раньше А. А. Дородницыным (2). Многомерная задача рассматривается впервые. Оказывается, что здесь имеют место явления, качественно новые сравнительно с двумерным случаем.

1°. Вычисление решения z. Замкнутую траекторию z мы разбиваем на два участка медленных движений, два участка быстрых движений и на четыре связывающих их переходных участка. Участки медленных движений, расположенные вблизи кусков u_1 и u_2, пусть будут (p_2'', s_1') и (p_1'', s_2'); участки быстрых движений, расположенные вблизи кусков v_1 и v_2, — (s_1'', p_1'), (s_2'', p_2'); переходные участки (s_1', s_1''), (p_1', p_1''), (s_2', s_2''), (p_2', p_2'').

Быстрое движение вдоль участка (s_1'', p_1') проходит с точностью до $O(\varepsilon)$ в подпространстве $y = \text{const}$ пространства R, смещенном относительно подпространства, содержащего кусок v_1, на вектор $\Delta_1 y$, который вычисляется на основе расчета траектории на переходном участке:

$$\Delta_1 y = \varepsilon^{2/3} \frac{\Omega}{\sqrt[3]{pr}}\, g - \frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{3}\left(\frac{h + qg}{p^2}\right). \tag{5}$$

Здесь Ω — число, не зависящее от системы уравнений $g = g(s_1) = (g^1, \ldots, g^l)$, $h = (h^1, \ldots, h^l)$ — векторы в пространстве Y и p, q, r — числа, зависящие от правых частей системы (1) в точке срыва s_1. Для их определения разложим правые части системы (1) в точке срыва $s_1 = (x_1, y_1)$ в ряды Тейлора, выписав только нужные нам члены:

$$f^i(x, y) = a^i_\alpha (x^\alpha - x_1^\alpha) + b^i_\mu (y^\mu - y_1^\mu) +$$
$$+ a^i_{\alpha\beta}(x^\alpha - x_1^\alpha)(x^\beta - x_1^\beta) + a^i_{\alpha\beta\gamma}(x^\alpha - x_1^\alpha)(x^\beta - x_1^\beta)(x^\gamma - x_1^\gamma) + \cdots,$$
$$g^j(x, y) = g^j + c^j_\alpha (x^\alpha - x_1^\alpha) + \cdots \tag{6}$$

Матрица $\| a^i_\alpha \|$ имеет лишь одно нулевое собственное значение; принадлежащий ему собственный вектор обозначим $m = (m^1, \ldots, m^k)$. Собственный вектор с нулевым собственным значением транспонированной матрицы обозначим $n = (n_1, \ldots, n_k)$. Таким образом $a^i_\alpha m^\alpha = 0$, $n_\alpha a^\alpha_i = 0$. Дополнительно вводим нормирующее соотношение $m^\alpha n_\alpha = 1$. Мы определяем $h^j = c^j_\alpha m^\alpha$, $p = n_\delta a^\delta_{\alpha\beta} m^\alpha m^\beta$, $q = n_\delta a^\delta_{\alpha\beta\gamma} m^\alpha m^\beta m^\gamma$, $r = n_\delta b^\delta_\mu g^\mu$. Аналогично для точки срыва s_2 вычисляется вектор смещения $\Delta_2 y$.

Переходим к описанию медленных движений вдоль траектории z. Обозначим S_1^*, S_2^* касательные пространства к поверхности Φ в точках срыва s_1, s_2, через P_1^*, P_2^* — касательные пространства к поверхности F в точках p_1, p_2. Мы будем считать их векторными пространствами с нулями в точках s_1, s_2, p_1, p_2. Пусть t_1 — время перехода по куску u_1. Для каждой точки $s_1 + \delta s_1$, входящей в Φ, найдется точка $p_2 + \delta p_2$ на поверхности F, переходящая в нее за время t_1 по некоторой траектории $u_1(\delta s_1)$ системы (2), близкой к траектории u_1. Линеаризируя отображение $\delta s_1 \to \delta p_2$, мы получим отображение M_1^* пространства S_1^* в векторное пространство P_2^*. Аналогично определяем отображение M_2^* векторного пространства S_2^* в P_1^*. Перенесем теперь параллельно пространства S_1^*, S_2^*, P_1^*, P_2^* так, чтобы их нули перешли в нуль пространства R, и затем спроектируем в направлении X в пространство Y. Тогда пространства P_1^*, P_2^* отобразятся на Y, S_1^*, S_2^* — на его подпространства S_1, S_2, а отображения M_1^* и M_2^* перейдут в отображения M_1, M_2 пространств S_1 и S_2 в Y. Отображение M_1, заданное только на S_1, продолжим в отображение N_1 всего пространства Y на себя, положив $N_1 g(s_1) = g(p_2)$. Аналогично определим отображение N_2. Отображения N_1 и N_2 вычисляются при помощи решения уравнений в вариациях порядка l.

Медленные движения вдоль участков (p_2'', s_1') и (p_1'', s_2') проходят с точностью до $O(\varepsilon)$ не вблизи кусков u_1 и u_2, а вблизи траекторий $u_1(\delta s_1)$, $u_2(\delta s_2)$. Это явление объясняется наличием векторов смещений $\Delta_1 y$ и $\Delta_2 y$ и имеет место только при $l \geqslant 2$. Величины δs_1 и δs_2 с точностью до $O(\varepsilon)$ можно рассматривать как векторы пространств S_1^* и S_2^*. Их образы в S_1 и S_2 обозначим δ_1 и δ_2. δ_1 находится из уравнения

$$\delta_1 - L_1 L_2 \delta_1 = L_1 L_2 \Delta_1 y + L_1 \Delta_2 y. \tag{7}$$

Здесь L_1 — линейное отображение пространства Y на пространство S_1, определенное формулой

$$L_1 y = N_1^{-1} y - ({}_1w \cdot N_1^{-1} y)\, g, \tag{8}$$

в которой через ${}_1w = ({}_1w_1, \ldots, {}_1w_l)$ обозначен ковариантный вектор с координатами ${}_1w_j = n_\alpha b_j^\alpha$, определяющий плоскость S_1 в Y и пронормированный так, что ${}_1w \cdot g = 1$. L_2 определяется аналогично.

2°. Вычисление периода. Период T решения z вычисляется на основе расчета траектории на переходных участках. Он представляется в виде $T = T_0 + \Delta_1 T + \Delta_2 T$, где $T_0 = t_1 + t_2$ — период решения z_0, а $\Delta_1 T$ и $\Delta_2 T$ — слагаемые, относящиеся, соответственно, к точкам срыва s_1 и s_2. Выпишем формулу для $\Delta_1 T$ (выражение для $\Delta_2 T$ аналогично):

$$\Delta_1 T = \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\Omega}{\sqrt[3]{pr}} \right) + \frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{3} \left(\frac{q}{p^2} - \frac{s}{2pq} \right) + \alpha. \tag{9}$$

Входящие сюда числа p, q, r и Ω были определены выше, $s = n_\mu b_\delta^\mu c_\alpha^\delta m^\alpha$, $\alpha = -({}_2w \cdot N_1^{-1}(\delta_1 + \Delta_1 y))$ (ковариантный вектор ${}_2w$ определяется аналогично вектору ${}_1w$).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
1 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Железцов, Л. В. Родыгин, ДАН, **81**, № 3, 391 (1951). [2] А. А. Дородницын, Прикладн. матем. и мех., **11**, в. 3, 313 (1947).