Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. ЛЕБЕДЕВ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 6 V 1955)

Пусть требуется решить систему

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - a_k \Delta u_k = f_k(X, t), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

где $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\alpha_k > 0$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в области $Q = \Omega \times [0, l]$, Ω ограничена кусочно-гладкой поверхностью S, при следующих условиях:

$$f_k \in L_2(Q), \quad u_k|_{t=0} = \varphi_k(X) \in W_2^{(1)}(\Omega), \quad \left.\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|_S = \sum_{l=1}^{m} b_{kl}(X)\, u_l\Big|_S, \tag{2}$$

$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

где b_{kl} подчинены следующим условиям: найдутся такие $c_k > 0$, что

$$c_k b_{kl}(X)\Big|_S = c_l \overline{b_{lk}(X)}, \qquad \sum_{k,l=1}^{m} c_k b_{kl} \bar{\xi}_k \xi_i \Big|_S \leqslant 0; \tag{3}$$

b_{kl} — непрерывные функции, продолжаемые с сохранением свойств (3) на расстояние h_0 внутрь области Ω.

Обобщенным решением (1) назовем функции $u_k \in W_2^{(1)}(Q)$, если для любых $\Phi_k \in W_2^{(1)}(Q)$ таких, что $\Phi_k|_{t=l} = 0$,

$$\int_0^l \int_\Omega \left(-\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} u_k + a_k \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} - f_k \Phi_k \right) d\Omega\, dt =$$

$$= a_k \int_0^l \int_S \Phi_k \sum_{l=1}^{m} b_{kl} u_l\, dS\, dt + \int_\Omega \Phi_k \varphi_k\, d\Omega\Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Теорема 1. *Решение уравнений* (1) *при условиях* (2), (3) *единственно в* $W_2^{(1)}(Q)$.

Покажем, что если для любых Φ_k, удовлетворяющих нашим ограничениям,

$$\int_0^l \int_\Omega \left(-\frac{1}{a_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} u_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \right) d\Omega\, dt = \int_0^l \int_S \Phi_k \sum_{l=1}^{m} b_{kl} u_l\, dS\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

то $u_k \equiv 0$ в Q.

Возьмем

$$\Phi_k = \int_t^l \bar{u}_k \, d\tau;$$

тогда

$$\int_0^l \iint_\Omega \left(\frac{|u_k|^2}{a_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \int_t^l \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} d\tau \right) d\Omega \, dt = \int_0^l \iint_S \int_t^l \bar{u}_k d\tau \sum_{l=1}^m b_{kl} u_l \, dS \, dt, \tag{5}$$

$$\int_0^l \iint_\Omega \left(\frac{|u_k|^2}{a_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \int_t^l \frac{\partial u_k}{\partial x_j} d\tau \right) d\Omega \, dt = \int_0^l \iint_S \int_t^l u_k d\tau \sum_{l=1}^m \overline{b_{kl}} \, \bar{u}_l \, dS \, dt, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

(5) можно переписать так:

$$\int_0^l \iint_\Omega \frac{|u_k|^2}{a_k} d\Omega \, dt + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left| \int_0^l \frac{\partial u_k}{\partial x_j} d\tau \right|^2 d\Omega - \sum_{j=1}^n \int_0^l \iint_\Omega \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \int_t^l \frac{\partial u_k}{\partial x_j} d\tau \, d\Omega \, dt =$$

$$= \int_S \sum_{l=1}^m b_{kl} \left(\int_0^l u_l d\tau \cdot \int_0^l \bar{u}_k d\tau - \int_0^l \bar{u}_k \int_t^l u_l d\tau \, dt \right) dS, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Прибавляя (6) к (7) при одинаковых k, получим:

$$\frac{2\alpha_k}{|a_k|^2} \int_0^l \iint_\Omega |u_k|^2 \, d\Omega \, dt + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left| \int_0^l \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dt \right|^2 d\Omega = \int_S \left(\sum_{l=1}^m b_{kl} \int_0^l \bar{u}_k d\tau \int_0^l u_l d\tau \right) dS +$$

$$+ \int_S \left(\sum_{l=1}^m - b_{kl} \int_0^l \bar{u}_k \int_t^l u_l d\tau \, dt + \bar{b}_{kl} \int_0^l \bar{u}_l \int_t^l u_k d\tau \, dt \right) dS, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Умножим (8) на c_k и просуммируем по k, тогда получим:

$$\sum_{k=1}^m c_k \left(\frac{2\alpha_k}{|a_k|^2} \int_Q |u_k|^2 \, dQ + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left| \int_0^l \frac{\partial u_k}{\partial x_j} d\tau \right|^2 d\Omega \right) =$$

$$= \int_S \left(\sum_{k,l=1}^m c_k b_{kl} \int_0^l \bar{u}_k d\tau \cdot \int_0^l u_l d\tau \right) dS \leqslant 0, \tag{9}$$

откуда следует, что $u_k \equiv 0$ в Q, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Докажем существование обобщенного решения (1) и сходимость к нему дифференциально-разностного метода.

Разобьем пространство $R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ плоскостями $x_i = k_i \Delta x_i = k_i h$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где k_i — целые числа, на кубы $\Omega_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, координаты точек которых определяются неравенствами: $k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1)h$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Точки с координатами $(k_1 h, k_2 h, \ldots, k_n h)$ назовем вершинами решетки; обозначим через Ω_h область, составленную из тех кубов $\Omega_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, которые принадлежат Ω; через Q_h — призму $\Omega_h \times [0, l]$; граничную поверхность Ω_h обозначим через S_h.

Положим

$$u_{x_i} = \frac{u(x_i + \Delta x_i) - u(x_i)}{\Delta x_i}, \quad u_{\bar{x}_i} = \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x_i)}{\Delta x_i},$$

$$u_{x_i \bar{x}_i} = \frac{u(x_i - \Delta x_i) - 2u(x_i) + u(x_i + \Delta x_i)}{(\Delta x_i)^2}.$$

Для точек $X_0 \in S_h$ определим разностную нормальную производную $\Delta u/\Delta n$ так: пусть в точке X_0 можно образовать p различных разностных отношений вида u_{x_i} или $u_{\bar{x}_i}$, вычисленных через значения $u_k \in \Omega_h$ и $u_k(X_0)$; тогда полагаем $\Delta u/\Delta n$ равным сумме этих разностных отношений.

Заметим, что в дальнейшем переход от f_k, φ_k к средним функциям f_{kh}, φ_{kh}, нужный при некоторых предельных переходах, опускается; функции u_{kh}, заданные в вершинах решетки Ω_h, там, где нет опасности спутать их с u_k, обозначаются также через u_k; шаг h выбран таким, чтобы S_h лежала в области продолжения b_{kl}.

Теорема 2. *Существует обобщенное решение уравнений* (1) *при условиях* (2), (3); *дифференциально-разностный метод сходится к этому решению.*

Заменим уравнения (1) в точках решетки Ω_h системами уравнений:

$$\frac{du_k}{dt} - a_k \sum_{j=1}^{n} u_{kx_j \bar{x}_j} = f_k, \tag{10}$$

$$\frac{\Delta u_k}{\Delta n}\Big|_{S_h} = \sum_{l=1}^{m} b_{kl} u_l \Big|_{S_h}, \quad u_k|_{t=0} = \varphi_k(X), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Решение (10) при каждом h существует. Рассмотрим выражения:

$$I_k(t) = 2\alpha_k h^n \int_0^t \sum_{\Omega_h} \left| \frac{du_k}{dt} \right|^2 dt + |a_k|^2 h^n \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{n} |u_{kx_j}|^2, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\sum_{\bar{\Omega}}$ означает суммирование по всем разностным отношениям, вычисленным в точках, принадлежащих $\Omega_h + S_h$. Тогда

$$\frac{dI_k}{dt} = h^n \sum_{\Omega_h} \left[2\alpha_k \left| \frac{du_k}{dt} \right|^2 - |a_k|^2 \sum_{j=1}^{n} \left(u_{kx_j \bar{x}_j} \frac{d\bar{u}_k}{dt} + \bar{u}_{kx_j \bar{x}_j} \frac{du_k}{dt} \right) \right] +$$

$$+ |a_k|^2 h^{n-1} \sum_{S_h} \left(\frac{d\bar{u}_k}{dt} \frac{\Delta u_k}{\Delta n} + \frac{du_k}{dt} \frac{\Delta \bar{u}_k}{\Delta n} \right), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{11}$$

Отсюда, учитывая (10), получаем, что

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{|a_k|^2} I_k(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{|a_k|^2} \left[I_k(0) - h^n \sum_{\Omega_h} \int_0^t \left(a_k \frac{du_k}{dt} \bar{f}_k + \bar{a}_k \frac{d\bar{u}_k}{dt} f_k \right) dt \right] +$$

$$+ h^{n-1} \sum_{S_h} \sum_{k,l=1}^{m} c_k b_{kl} \bar{u}_k u_l \Big|_0^t. \tag{12}$$

Из (12) заключаем, что $u_{kh} \in W_2^{(1)}(\Omega_h)$, $0 \leqslant t \leqslant l$, $u_{kh} \in W_2^{(1)}(Q_h)$; следовательно, из $\{u_{kh}\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(Q')$ $(\overline{Q}' \subset Q)$ к некоторым функциям $u_k \in W_2^{(1)}(Q)$ таким, что обобщенные производные $\{u_{khx}\}$ также слабо сходятся в $L_2(Q')$ к обобщенным производным u_{kx} при $h \to 0$. Покажем, что u_k являются решением (1).

Так как

$$h^n \int_0^l \Big(-\sum_{\Omega_h} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} u_{kh} + a_k \sum_{\overline{\Omega}_h} \sum_{i=1}^{n} u_{khx_i} \Phi_{kx_i} - f_k \Phi_k \Big) dt =$$

$$= h^n \sum_{\Omega_h} \varphi_k \Phi_k \Big|_{t=0} + a_k h^{n-1} \int_0^l \sum_{S_h} \Phi_k \sum_{l=1}^{m} b_{kl} u_{lh} \, dt, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad (13)$$

то, переходя в (13) к пределу при $h \to 0$, учитывая, что все выражения в (13) имеют пределы, равные соответствующим выражениям в равенстве (4), получаем для u_k равенство (4). В силу теоремы 1 пределы $\{u_{kh}\}$ единственны, ч. т. д.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 V 1955