Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. П. КОСТОМАРОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНО-ОСОБОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым V 10 1955)

В окрестности иррегулярно-особой точки решения однородного линейного дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами разлагаются в обобщенные ряды Лорана. В общем случае не существует эффективного метода вычисления коэффициентов таких рядов; кроме того, эти ряды не дают описания поведения решений при приближении к особой точке. Удобнее пользоваться для исследования решений в окрестности иррегулярно-особой точки введенными Пуанкаре (1) асимптотическими рядами. Для уравнений с рациональными коэффициентами последние могут быть получены при помощи преобразования Лапласа (1–3). Известны и другие методы (4,5).

В настоящей работе получаются асимптотические формулы для решений линейных уравнений второго порядка с аналитическими коэффициентами и исследуется вопрос о структуре областей, в которых справедливы полученные формулы.

1. Переходя в уравнении

$$\frac{d^2w}{dz^2} - Q(z)\,w = 0 \tag{1}$$

к новым переменным

$$z_1 = \int_{z_0}^{z} \sqrt{Q(\zeta)}\,d\zeta, \qquad w_1 = \sqrt[4]{Q}\,w, \tag{2}$$

будем иметь

$$\frac{d^2w_1}{dz_1} - Q_1 w_1 = 0, \tag{3}$$

где $Q_1 = 1 - q_1 = 1 - \frac{5Q'^2 - 4QQ''}{16Q^3}$ (здесь, как и в дальнейшем, штрихами обозначены производные по z).

Если в уравнении (3) проделать такую же замену переменных, то мы вновь получим уравнение, не содержащее первой производной. Будем неограниченно продолжать этот процесс. После $(n+1)$-го шага придем к уравнению

$$\frac{d^2w_{n+1}}{dz_{n+1}^2} - [1 - q_{n+1}(z(z_{n+1}))]\,w_{n+1} = 0, \tag{4}$$

которое может быть получено непосредственно из исходного заменой переменных

$$z_{n+1} = \int_{z_0}^{z} \sqrt{F_n(\zeta)}\, d\zeta, \qquad w_{n+1} \sqrt[4]{F_n} w, \tag{5}$$

где $F_n = \prod_{i=0}^{n} Q_i$.

Для последовательности функций $\{F_n\}$ легко установить следующие рекуррентные соотношения:

$$F_0 = Q, \qquad F_{n+1} = Q - \frac{5F_n'^2 - 4F_nF_n''}{16F_n^2}. \tag{6}$$

2. Предположим теперь, что точка $z = \infty$ является иррегулярно особой точкой уравнения (1), т. е. $Q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{m-l}$ при $|z| > r_0$, где m — целое число, причем $m > -2$.

Оценим функцию $h_{n+1}(z_{n+1}) = q_{n+1}(z(z_{n+1}))$ для достаточно большого $|z_{n+1}|$. Индукцией легко доказать, что

$$F_n = \sum_{l=0}^{\infty} a_{n,l} z^{m-l} \quad \text{при } |z| > r_n \geqslant r_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant r_0, \tag{7}$$

$$q_{n+1} = \sum_{l=0}^{\infty} b_{n+1,l}\, z^{-(m+2)(n+1)-l} \quad \text{при } |z| \geqslant r_{n+1}, \tag{8}$$

откуда получаем

$$h_{n+1}(z_{n+1}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+1,l} z_{n+1}^{-2(n+1)-\frac{2l}{m+2}} \quad \text{при } |z_{n+1}| \geqslant \tilde{r}_{n+1},$$

где $\tilde{r}_{n+1}$ — достаточно большое положительное число. Таким образом:

$$|h_{n+1}(z_{n+1})| < \frac{M_{n+1}}{|z_{n+1}|^{2(n+1)}} \quad \text{при } |z_{n+1}| \geqslant \tilde{r}_{n+1}. \tag{9}$$

Рассмотрим на римановой поверхности комплексного переменного z области G_k, расположенные в окрестности бесконечно удаленной точки и определенные следующим образом:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \arg z_{n+1} < \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad |z_{n+1}| < \tilde{r}_{n+1}.$$

Асимптотами границ области G_k при $z \to \infty$ будут лучи

$$\arg z = \frac{\pi[1 + 2(k-1)]}{m+2} - \alpha_0, \qquad \arg z = \frac{\pi(1+2k)}{m+2} - \alpha_0,$$

где $\alpha_0 = \frac{m}{m+2} \arg a_0$.

Очевидно, что $\operatorname{Re} z_{n+1}$ сохраняет знак внутри области G_k, причем $\operatorname{Re} z_{n+1} > 0$, если k четное, и $\operatorname{Re} z_{n+1} < 0$, если k нечетное.

Теорема 1. *Пусть точка $z = \infty$ является иррегулярно-особой точкой уравнения* (1); *тогда существует решение этого уравнения $w_{(k)}(z)$, представимое в области $G = G_{k-1} + G_k + G_{k+1}$ в виде*

$$w_{(k)}(z) = A \frac{\exp\left[(-1)^{k-1}\int\limits_{z_0}^{z}\sqrt{F_n(\zeta)}\,d\zeta\right]}{\sqrt[4]{F_n}}\left[1+O\left(\frac{1}{z^{(2n+1)\frac{m+2}{2}}}\right)\right], \qquad (10)$$

где A — произвольная постоянная.

Доказательство теоремы основано на сведении дифференциального уравнения (4) к интегральному уравнению Вольтерра с ядром, пропорциональным функции $h_{n+1}(z_{n+1})$, для которой имеет место оценка (9).

3. В силу соотношения (8) имеем

$$F_{n+p} - F_n = F_n\left[\prod_{j=n+1}^{n+p}(1-q_j) - 1\right] \sum_{l=0}^{\infty} \delta^{(l)}_{n+p,\,n} z^{-[(m+2)n+2]-l},$$

откуда следует, что $a_{n,l} = \bar{a}_l$ при $n \geqslant N(l)$, где $\bar{a}_l$ — некоторое не зависящее от n число. Составим выражение $F = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \bar{a}_l z^{m-l}$ (написанный ряд будет, вообще говоря, расходиться). Из теоремы 1 вытекает, что имеет место следующее асимптотическое разложение решения $w_{(k)}(z)$:

$$w_{(k)}(z) \simeq A \frac{\exp\left[(-1)^{k-1}\int\limits_{z_0}^{z}\sqrt{F(\zeta)}\,d\zeta\right]}{\sqrt[4]{F}}, \qquad (11)$$

справедливое в области $G = G_{k-1} + G_k + G_{k+1}$.

Пользуясь рекуррентными формулами (6) для функций F_n, легко доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть последовательность функций $\{F_n\}$ равномерно сходится в любой замкнутой подобласти некоторой области G к функции $F(z)$, причем ни в одной точке области $F(z) \neq 0$; тогда функции*

$$w_1(z) = A_1 \frac{\exp\left(\int\limits_{z_0}^{z}\sqrt{F(\zeta)}\,d\zeta\right)}{\sqrt[4]{F}}, \qquad w_2(z) = A_2 \frac{\exp\left[-\int\limits_{z_0}^{z}\sqrt{F(\zeta)}\,d\zeta\right]}{\sqrt[4]{F}}$$

будут решениями уравнения (1).

4. Из теоремы 1 следует, что для каждой области G_k существует единственное, с точностью до множителя, решение уравнения (1) $w_{(k)}(z)$, экспоненциально убывающее в этой области. В двух соседних областях G_{k-1} и G_{k+1} оно экспоненциально растет. Формула (11) дает асимптотическое разложение этого решения в области $G = G_{k-1} + G_k + G_{k+1}$. Доказать ее справедливость в более широкой области, вообще говоря, нельзя. Из теоремы 2 вытекает, что формула (11) будет носить не асимптотический, а точный характер, если последовательность $\{F_n\}$ равномерно сходится в любой области G_R вида $R_0 \leqslant |z| \leqslant R$.

Решения $w_{(k)}(z)$ и $w_{(k+1)}(z)$ линейно независимы, а потому образуют фундаментальную систему, поведение которой нам известно в области $G = G_k + G_{k+1}$. Из теоремы 1, в частности, следует, что асимптотическое разложение функции Уиттекера справедливо не только при

$-\pi < \arg z < \pi$, как указывал Уиттекер ([6]), а в более широкой области $-{}^3/_2\pi < \arg z < {}^3/_2\pi$.

Полученные результаты легко могут быть применены к исследованию поведения решений любого однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с аналитическими коэффициентами в окрестности произвольно расположенной иррегулярно-особой точки.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонова, А. А. Самарского и Ю. Л. Рабиновича за помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Poincaré, Acta Math., **8**, 328 (1886). [2] J. Horn, Math. Ann., **50**, 525 (1898). [3] J. Horn, Acta Math., **23**, 177 (1900). [4] J. Horn, J. f. reine u. angew. Math., **118**, 257 (1897). [5] Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 1951, стр. 208. [6] Е. Т. Уиттекер, Г. И. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, 1934, стр. 147.