Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

В. Н. МАСЛЕННИКОВА

О СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 I 1955)

Рассмотрим систему уравнений заметки ([4]) при $\alpha = 1$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v_y - \frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z,$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_x - \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} + \psi \tag{1}$$

в области Ω переменных x, y, z, ограниченной гладкой поверхностью S при $\infty > t \geqslant 0$, и полученное из (1) исключением неизвестных v_x, v_y, v_z уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta p + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} = f. \tag{2}$$

Случай, когда в последнее уравнение системы (1) не входит $\partial p / \partial t$, был рассмотрен С. Л. Соболевым ([1]) и им были решены смешанные задачи при начальных условиях $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^0(x, y, z)$ и одном из граничных условий $p|_S = 0$ или $v_n|_S = 0$. Уравнение (2) при этом имело вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta p + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = f.$$

В настоящей работе показывается возможность постановки обоих смешанных задач для системы (1), именно, доказывается, что система (1) имеет решение, удовлетворяющее начальным данным

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^0(x, y, z); \quad p|_{t=0} = p^0(x, y, z) \tag{3}$$

и одному из граничных условий

$$p|_S = 0 \tag{4}$$

или

$$v_n|_S = 0, \tag{5}$$

где v_n — проекция вектора $\mathbf{v}$ с компонентами v_x, v_y, v_z на внутреннюю нормаль к поверхности S.

Одновременно с этим показывается, что уравнение (2) имеет решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \tag{6}$$

и одному из граничных условий

$$p|_S = 0 \tag{7}$$

или

$$L_1 p|_S \equiv \left[\frac{\partial p}{\partial z}\cos nz + \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial n} - \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t}\cos ny + \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial t}\cos ny\right]_S = 0. \tag{8}$$

Определение 1. Назовем обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (2) при условиях (6) и (7) функцию $p(x, y, z, t)$, принадлежащую классу ([2]) $\overset{0}{D}_1(Q)$ (где Q — цилиндр в пространстве переменных x, y, z, t высоты l с основанием Ω) и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^l \iiint_\Omega \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 p}{\partial y\,\partial t^2}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial^3 p}{\partial z\,\partial t^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + p\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right] d\Omega\, dt =$$

$$= -\int_0^l \iiint_\Omega f\Phi\, d\Omega\, dt \tag{9}$$

для любой функции $\Phi(x, y, z, t) \in \overset{0}{D}_1(Q)$ такой, что

$$\Phi \in W_2^2(t)\ ([3]), \quad \Phi(x, y, z, t)\big|_{t=l} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}\bigg|_{t=l} = 0.$$

$\overset{0}{D}_1$ есть замыкание в норме $W_2^1(Q)$ совокупности всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в δ-окрестности боковой поверхности цилиндра Q (см. ([2])).

Теорема 1. *Если правая часть уравнения* (2) *такова, что*

$$\int_0^\infty \iiint_\Omega f^2 e^{-2\lambda_1 t}\, d\Omega\, dt < \infty \tag{10}$$

для какого-нибудь $\lambda_1 \geqslant 0$, *то существует единственное обобщенное в смысле* (9) *решение уравнения* (2) *смешанной задачи при условиях* (6) *и* (7), *которое может быть представлено как трансформация Лапласа от обобщенного решения уравнения*

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (\lambda^2 + 1)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \lambda^2(1 + \lambda^2)P = \varphi(x, y, z, \lambda), \tag{11}$$

удовлетворяющего условию $P \in \overset{0}{D}(\Omega)$ *при* λ *таком, что* $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 > \lambda_0 > 1$, *где*

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x, y, z, t)\, e^{-\lambda t}\, dt,$$

причем для $p(x, y, z, t)$ *справедлива оценка*

$$\iiint_\Omega \int_0^\infty \left[p^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial x\,\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial y\,\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial z\,\partial t^2}\right)^2\right] e^{-2\lambda_1 t}\, d\Omega\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C \iiint_\Omega \int_0^\infty f^2 e^{-2\lambda_1 t}\, d\Omega\, dt \tag{12}$$

и интеграл

$$p(x, y, z, t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x, y, z, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda \tag{13}$$

существует для почти всех x, y, z.

Определение 2. Назовем обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (2) при условиях (6) и (8) функцию $p(x, y, z, t)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^t \iiint_\Omega \left[\frac{\partial^3 p}{\partial x\,\partial t^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 p}{\partial y\,\partial t^2}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial^3 p}{\partial z\,\partial t^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \bar{\rho}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right] d\Omega\, dt =$$

$$= -\int_0^t \iiint_\Omega f\Phi\, d\Omega\, dt \qquad (14)$$

для произвольной функции $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ и такой, что

$$\Phi \in W_2^2(t), \quad \Phi|_{t=l} = 0; \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=l} = 0.$$

Теорема 2. *Если правая часть уравнения* (2) *удовлетворяет условию* (10), *то существует единственное обобщенное в смысле* (14) *решение уравнения* (2) *при условиях* (6) *и* (8), *которое может быть представлено как трансформация Лапласа от обобщенного решения уравнения* (11) *при краевом условии*

$$\left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos nz + \lambda^2\frac{\partial P}{\partial n} - \lambda\frac{\partial P}{\partial x}\cos ny + \lambda\frac{\partial P}{\partial y}\cos nx\right]_S = 0, \qquad (15)$$

причем имеют место оценки (12) *и интеграл* (13) *существует для почти всех* x, y, z.

Доказательство существования обобщенного решения для уравнения (11) при нулевом краевом условии или при краевом условии (15) можно провести методом конечных разностей с использованием результатов О. А. Ладыженской (2).

Для решения системы (1) при условиях (3), (4) или (3), (5) справедливо неравенство

$$K_0(t) \leqslant e^t K_0(0) + \int_0^t e^{t-t_1} A(t_1)\, dt_1, \qquad (16)$$

где

$$K_0(t) \equiv \iiint_\Omega (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + p^2)\, d\Omega,$$

$$A(t) \equiv \iiint_\Omega (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 + \psi^2)\, d\Omega,$$

из которого непосредственно следует единственность решения и непрерывная зависимость его от начальных данных и правых частей уравнений системы (1) в среднем.

Решение обеих смешанных задач осуществляется сведением их к смешанным задачам для уравнения (2) относительно неизвестной p. В первой задаче краевое условие для p дано непосредственно, во второй задаче его можно получить при помощи элементарных выкладок как следствие условия (5). Оказывается, что функция p на границе должна удовлетворять соотношению:

$$L_1 p|_S \equiv \left[\frac{\partial p}{\partial z}\cos nz + \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial n} - \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t}\cos ny + \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial t}\cos nx\right]_S = G(x, y, z, t), \qquad (17)$$

где

$$G(x, y, z, t) = \left[F_z \cos nz + \frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} + \frac{\partial F_y}{\partial t}\cos nx - \frac{\partial F_x}{\partial t}\cos ny\right]_S.$$

Начальные условия для решения уравнения (2) для p определяются через систему (1). После сведения неоднородных начальных условий и неоднородного граничного условия (17) к однородным (для чего требуем выполнения некоторых условий согласования) существование и единственность решения уравнения для p даются теоремами 1 и 2. При нахождении вектора $\mathbf{v}$ в обеих смешанных задачах используются результаты С. Л. Соболева [1] и разложение гильбертова пространства H в прямую сумму соленоидального и потенциального подпространств. Таким образом, доказательство существования решения обеих смешанных задач сначала проводится в предположении достаточной гладкости правых частей системы (1) и начальных данных (3), но из неравенства (16) будет следовать существование обобщенного решения системы (1), если правые части системы (1) и начальные данные будут суммируемы с квадратом по Ω.

В заключение выражаю благодарность акад. С. Л. Соболеву за руководство и помощь в работе.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
26 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, № 1 (1954). [2] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953. [3] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950. [4] В. Н. Масленникова, ДАН, **102**, № 4 (1955).