Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. А. ВОЛКОВ

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 2 VI 1955)

1. Применение метода конечных разностей для решения уравнений смешанного типа обосновано в работе (1). В работе (2) рассматривается один приближенный способ решения уравнения Лаврентьева

$$u_{xx} + \theta(y)\, u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $\theta(y) = 1$ при $y > 0$ и $\theta(y) = -1$ при $y < 0$ в области D, ограниченной в верхней полуплоскости (при $y \geqslant 0$) гладкой линией L с концами $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, а в нижней — кусками характеристик AC и BC, удовлетворяющего условиям

$$u|_L = \varphi; \quad u|_{AC} = \psi. \tag{2}$$

Этот способ состоит в том, что приближенное решение $\bar{u}$ в верхней части D при $y > 0$ (в D') находится как решение системы разностных уравнений, а в нижней части D приближенное решение находится квадратурой. При предположении, что точное решение уравнения (1) имеет в D' ограниченные третьи производные, в работе (2) дается оценка ошибки приближенного решения порядка шага сетки h. Однако это предположение может выполняться только в специальных частных случаях. Обычно в точке A первые производные решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), имеют особенность ниже первой степени (3).

В настоящей заметке мы построим разностную схему для приближенного решения в области эллиптичности, несколько отличающуюся от (2), и оценим порядок ошибки в случае особенности точного решения в точке A. Кроме того рассмотрим один способ измельчения сетки в окрестности точки A для повышения точности приближенного решения и дадим соответствующие оценки.

2. Выберем сетку с шагом $h = 1/n$ (n целое) и введем разностные операторы:

1) Для точек сетки (ih, jh), лежащих в D' $(j > 0)$, если точки $[(i \pm 1)h, (j \pm 1)h] \in \overline{D}'$:

$$\Delta_h^{(1)} z_{ij} = (z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1})/4 - z_{ij}; \tag{3}$$

2) для точек сетки $(ih, 0)$, лежащих в промежутке AB, если точка $(ih, h) \in \overline{D}'$:

$$\Delta_h^{(2)} z_{i0} = (z_{i-1,0} + z_{i1})/2 - z_{i0}; \tag{4}$$

3) для остальных точек сетки, лежащих в D' и в промежутке AB:

$$\Delta_h^{(3)} z_{ij} = z_{ij}. \tag{5}$$

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\Delta_h^{(1)} z_{ij}^{(h)} = a_{ij}^{(k)}, \quad \Delta_h^{(2)} z_{i0}^{(h)} = b_{i0}^{(h)}, \quad \Delta_h^{(3)} z_{ij} = 0, \tag{6}$$

где

$$\max_{i+j=s} (|a_{ij}^{(k)}|, |b_{i0}^{(h)}|) = \begin{cases} C^{(k)} \geqslant 0, & s = k; \\ 0, & s \neq k. \end{cases}$$

На основании принципа максимума (6) имеет единственное решение. Предположим, что линия L не пересекает прямой $y + x = 0$; тогда имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Решение системы разностных уравнений* (6) *удовлетворяет неравенству*

$$\max_{i,j} |z_{ij}^{(h)}| \leqslant kC^{(h)}. \tag{7}$$

Обозначим через $M_s^{(h)}$ максимальное значение модуля $z_{ij}^{(h)}$ в точках сетки, для которых $i + j = s$. На основании принципа максимума имеем

$$\max_{i,j} |z_{ij}^{(h)}| = M_k^{(h)}; \quad M_s^{(h)} \leqslant \begin{cases} \frac{s}{k} M_k^{(h)}, & s < k; \\ M_k^{(h)}, & s > k. \end{cases} \tag{8}$$

Из (8) и (6) непосредственно следует (7).

3. Составим для приближенного решения $\bar{u}$ уравнения (1) систему разностных уравнений

$$\Delta_h^{(1)} \bar{u}_{ij} = 0, \quad \Delta_h^{(2)} \bar{u}_{i0} = h\chi_i, \quad \Delta_h^{(3)} \bar{u}_{ij} = \varphi_{ij}, \tag{9}$$

где $\chi_i = [u'_y(ih, 0) - u'_x(ih, 0)]/2$; φ_{ij} — значение φ в одной из точек L, расположенной на минимальном расстоянии от точки (ih, jh).

Предположим, что производные по любому направлению l точного решения уравнения (1) в $\overline{D'}$ удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{\partial^m u(x, y)}{\partial l^m} \right| \leqslant \frac{C}{R^{m-\alpha}} \quad (m = 1, 2, 3), \tag{10}$$

где C и α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ — постоянные; R — расстояние от точки (x, y) до точки A. Тогда погрешность $v = u - \bar{u}$ будет удовлетворять системе разностных уравнений

$$\Delta_h^{(1)} v_{ij} = a_{ij} h^\alpha, \quad \Delta_h^{(2)} v_{i0} = b_{i0} h^\alpha, \quad \Delta_h^{(3)} v_{ij} = c_{ij} h^\alpha, \tag{11}$$

где

$$\max_{i+j=k} (|a_{ij}|, |b_{i0}|) \leqslant c_1 \frac{1}{k^{3-\alpha}}; \quad \max_{i,j} |c_{ij}| \leqslant c_1 \text{ *}.$$

На основании принципа максимума и леммы 1 получаем оценку погрешности

$$\max_{i,j} |v_{ij}| \leqslant c_1 h^\alpha + c_1 h^\alpha \sum_{k=1}^{O(1/h)} \frac{1}{k^{2-\alpha}} \leqslant \begin{cases} c_2 h^\alpha, & \alpha < 1; \\ c_3 h |\ln h|, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{12}$$

* Через c_p $(p = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать постоянные, не зависящие от шага сетки.

4. Аналогичная оценка погрешности имеет место, если предположить, что линия L целиком расположена выше некоторой прямой $y + \varepsilon_0 x = 0$, где $0 < \varepsilon_0 < 1$.

5. В частном случае, когда решение уравнения (1) имеет ограниченные четвертые производные в D' и непрерывные третьи производные в $\overline{D}'$, при замене в системе разностных уравнений (9) оператора простого сноса граничных условий $\Delta_h^{(3)}$ оператором линейной интерполяции по Коллатцу ([4]) погрешность приближенного решения имеет порядок h^2 ([5]).

6. Рассмотрим следующий процесс измельчения сетки в окрестности точки A (рис. 1). Выберем в центрах квадратов, лежащих на некоторой прямой C_1D_1 с угловым коэффициентом, равным -1, основной сетки с шагом h дополнительные точки, значения неизвестных в которых будем искать как среднее арифметическое значений неизвестных в вершинах квадратов. Остальные квадраты, лежащие ниже прямой C_1D_1, разобьем сеткой с шагом $h/2$. На некоторой прямой C_2D_2 можно измельчить шаг сетки еще в 2 раза и т. д. Таким способом на конечном интервале по отношению к данному шагу сетки путем деления пополам можно сколько угодно измельчить шаг сетки в окрестности точки A, и при этом для приближенного решения можно составить систему разностных уравнений, аналогичную (9).

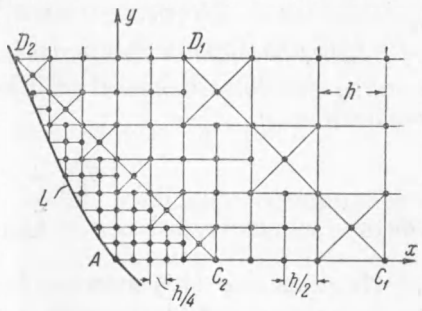


Рис. 1

Измельчим сетку так, чтобы точки сетки, лежащие на одной прямой с угловым коэффициентом -1, расположенной на расстоянии $r > 0$ от точки A, входили в разностные уравнения с шагом $\tilde{h}$:

$$\tilde{h} \leqslant c_4 r^{1-\alpha+\varepsilon} h \quad (\varepsilon \geqslant 0), \tag{13}$$

причем выберем минимальный шаг $\tilde{h}_{\min}$, удовлетворяющий условию $0{,}5 c_5 h^{1/\alpha} < \tilde{h}_{\min} \leqslant c_5 h^{1/\alpha}$, и при $r \geqslant c_4^{\alpha-1-\varepsilon}$ $\tilde{h} = h$.

Лемма 2. *Приближенное решение системы разностных уравнений для измельченной указанным способом сетки при условии, что линия L не пересекает прямой $y + x = 0$, имеет погрешность $v = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}$, удовлетворяющую неравенству*

$$|v| \leqslant \begin{cases} c_6 h, & \varepsilon > 0; \\ c_7 h |\ln h|, & \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Погрешность $v^{(3)}$ в приближенном решении за счет переноса граничных значений функции в точки сетки (от оператора $\Delta_h^{(3)}$) на основании принципа максимума не превосходит погрешности переноса. На основании (10) и (13) имеем

$$|v^{(3)}| \leqslant c_8 \tilde{h} |u_l'(\xi, \eta_l)| \leqslant c_9 r^{1-\alpha+\varepsilon} h / r^{1-\alpha} \leqslant c_{10} h, \tag{15}$$

где (ξ, η) — точка, лежащая между граничной точкой, с которой производится снос значения φ, и точкой сетки; l — направление, соединяющее эти точки; r — расстояние от точки A до прямой с угловым коэффициентом -1, проходящей через точку сетки.

Погрешности разностного оператора усреднения $\Delta_h^{(1)}$, который мы обобщили и на дополнительные точки, лежащие на прямых C_1D_1, $C_2D_2, \ldots$, и оператора $\Delta_h^{(2)}$ имеют выражение

$$|\Delta_h^{(1)}u| \leqslant c_{11}\tilde{h}^3/r^{3-\alpha}, \quad |\Delta_h^{(2)}u - \tilde{h}\chi| \leqslant c_{11}\tilde{h}^3/r^{3-\alpha}, \tag{16}$$

где r — величина, равная минимальному расстоянию от точки A до прямых с угловым коэффициентом -1, проходящих через точки сетки, входящих в данный разностный оператор, за исключением операторов, составленных для точек $(\tilde{h}_{\min}, 0)$ и $(0, \tilde{h}_{\min})$, когда r принимается равным $\tilde{h}_{\min}/\sqrt{2}$.

Лемма 3. *Погрешность $v^{(1)}_{\rho\tilde{h}} + v^{(2)}_{\rho\tilde{h}}$ приближенного решения за счет погрешностей разностных операторов $\Delta_h^{(1)}$ и $\Delta_h^{(2)}$ для точек сетки, расположенных на прямой $y + x = \sqrt{2}\cdot\rho + \tilde{h}$, удовлетворяет неравенству*

$$|v^{(1)}_{\rho\tilde{h}} + v^{(2)}_{\rho\tilde{h}}| \leqslant c_{12}\tilde{h}^2/r^{2-\alpha}, \tag{17}$$

где $r = \rho$ при $\rho \neq 0$ и $r = \tilde{h}_{\min}/\sqrt{2}$ при $\rho = 0$.

Неравенство (17) выводится из (16) методом, аналогичным примененному при доказательстве леммы 1.

Используя ограниченность отношения $\tilde{h}/r \leqslant c_{13}$ и (13), правую часть неравенства (17) можно оценить при помощи интеграла

$$\frac{c_{12}\tilde{h}^2}{r^{2-\alpha}} \leqslant c_{14}h \int_r^{r+\tilde{h}/\sqrt{2}} \frac{dr}{r^{1-\varepsilon}}, \tag{18}$$

следовательно, погрешность $v^{(1)} + v^{(2)}$ можно оценить при помощи интеграла

$$|v^{(1)} + v^{(2)}| \leqslant c_{15}h \int_{0{,}5c_3h^{1/\alpha}}^{c_{16}} \frac{dr}{r^{1-\varepsilon}}. \tag{19}$$

На основании (15) и (19) имеем (14).

Институт точной механики
и вычислительной техники
Академии наук СССР

Поступило
30 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Карманов, ДАН, 95, № 3 (1954). [2] О. А. Ладыженская, Усп. матем. наук, 9, в. 4 (62) (1954). [3] А. В. Бицадзе, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 41 (1953). [4] L. Collatz, ZAMM, 13, 56 (1933). [5] Е. А. Волков, ДАН, 102, № 3 (1955).