Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. А. БРЕДИХИНА

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 V 1955)

1. Пусть фиксирована последовательность частот $\{\lambda_k\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\lambda_0 = 0$; $\lambda_k > 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ при $k \geqslant 1$; $\lambda_{-k} = -\lambda_k$; $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$). Будем считать, что почти-периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $Q\{\lambda_k\}$, если ее ряд Фурье имеет вид $\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{\lambda_{m_k}} e^{i\lambda_{m_k}x}$, где m_k — целые числа; $\lambda_{m_0} = \lambda_0$; $\lambda_{m_{-k}} = \lambda_{-m_k}$ и $|A_{\lambda_{m_k}}| + |A_{\lambda_{m_{-k}}}| > 0$ при $k \neq 0$. Считаем, что почти-периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $L\{\lambda_k\}$, если $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$ и, кроме того, $A_{\lambda_{m_0}} = 0$; $\arg A_{\lambda_{m_{-k}}} = -\arg A_{\lambda_{m_k}}$; $\lambda_{m_{k+1}} / \lambda_{m_k} = q_k \geqslant 0 > 8$ при $k \geqslant 1$. Положим

$$E_n(f) = \inf\left\{\sup_x \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right|\right\};$$

$$e_n(f) = \inf\left\{\sup_x \left| f(x) - \sum_{|m_k| \leqslant n} c_k e^{i\lambda_{m_k} x} \right|\right\}, \quad \text{где } c_k = 0 \text{ при } A_{\lambda_{m_k}} = 0;$$

$$R_n(f) = \sup_x \left| f(x) - \sum_{|m_k| \leqslant n} A_{\lambda_{m_k}} e^{i\lambda_{m_k} x} \right|, \quad \alpha_n(f) = \sum_{|m_k| > n} |A_{\lambda_{m_k}}|.$$

В этой заметке дается обобщение результатов о наилучших приближениях периодических функций ([1], гл. IV—V) на случай почти-периодических функций класса $Q\{\lambda_k\}$ и обобщение результатов С. Б. Стечкина ([2]), относящихся к наилучшим приближениям периодических функций, представимых лакунарными тригонометрическими рядами, на случай почти-периодических функций класса $L\{\lambda_k\}$.

2. Пусть

$$\bar{E}_\mu(f) = \inf\left\{\sup_x \left| f(x) - \sum_{|\lambda_k| < \mu} c_k e^{i\lambda_k x} \right|\right\},$$

$$\bar{e}_\mu(f) = \inf\left\{\sup_x \left| f(x) - \sum_{|\lambda_{m_k}| < \mu} c_k e^{i\lambda_{m_k} x} \right|\right\}, \quad \text{где } c_k = 0 \text{ при } A_{\lambda_{m_k}} = 0.$$

Теорема 1. *Если* $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$, *то* $\bar{e}_\mu(f) < 5\omega_f(1/\mu)$, *где* $\omega_f(\delta)$ — *модуль непрерывности* $f(x)$.

Доказательство. Пусть $f_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\Psi_\mu(u)\,du$, где

$$\Psi_\mu(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\mu(t)\, e^{-itu}\, dt,$$

$$\varphi_\mu(t) = 1 - \frac{6}{\mu^2}t^2 + \frac{6}{\mu^3}|t|^3 \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \frac{\mu}{2},$$

$$\varphi_\mu(t) = 2\left(1 - \frac{|t|}{\mu}\right)^3 \text{при} \ \frac{\mu}{2} < |t| \leqslant \mu, \quad \varphi_\mu(t) = 0 \text{ при } |t| > \mu.$$

1) Из неравенства $\Psi_\mu(u) \geqslant 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_\mu(u)\,du = 1$ следует почти-периодичность $f_\mu(x)$. Обозначив через B_λ коэффициент Фурье $f_\mu(x)$, соответствующий показателю λ, получим $B_\lambda = A_\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_\mu(u)\,e^{i\lambda u}\,du$, где A_λ — коэффициент Фурье $f(x)$, соответствующий показателю λ.

По формуле обращения Фурье ([3], гл. I, § 10)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_\mu(u)\,e^{i\lambda u}\,du = \varphi_\mu(\lambda), \tag{1}$$

поэтому

$$f_\mu(x) = \sum_{|\lambda_{m_k}|<\mu} B_{\lambda_{m_k}} e^{i\lambda_{m_k}x}, \quad \text{где } B_{\lambda_{m_k}} = A_{\lambda_{m_k}}\varphi_\mu(\lambda_{m_k}).$$

2) Мы имеем: $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Psi_\mu(u)\,du$. Принимая также во внимание четность $\Psi_\mu(u)$ и неравенство

$$\mu \int\limits_0^{\infty} u\,\Psi_\mu(u)\,du < 2, \tag{2}$$

получим

$$|f(x) - f_\mu(x)| < 5\,\omega_f(1/\mu).$$

Следствие. Если $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$ и $f'(x) \in \mathrm{Lip}_c\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то $\bar{e}_\mu(f) < 5c/\mu^\alpha$, в частности, $\bar{e}_\mu(f) < 5\sup|f'(x)|/\mu$, если $f(x)$ имеет ограниченную производную.

Теорема 2. *Если $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$ и имеет p равномерно-непрерывных производных, то $\bar{e}_\mu(f) < \frac{5^{p+1}}{\mu^p}\omega_f^{(p)}\left(\frac{1}{\mu}\right)$, где $\omega_f^{(p)}(\delta)$ — модуль непрерывности p-й производной.*

Доказательство. Показателями Фурье $f^{(r)}(x)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ являются показатели Фурье $f(x)$, отличные от нуля.

Следовательно, $f^{(r)}(x) \in Q\{\lambda_k\}$. По теореме 1 $\bar{e}_\mu(f^{(p)}) < 5\omega_f^{(p)}(1/\mu)$. По следствию теоремы 1 $\bar{e}_\mu(f^{(p-1)}) < 5^2\,\omega_f^{(p)}(1/\mu)/\mu$. Дальнейшее доказательство опускаем.

Следствие. Если $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 2 и $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}_c\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то $\bar{e}_\mu(f) < 5^{p+1}c/\mu^{p+\alpha}$.

Теорема 3. *Если $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$ и $|f(x+u) - 2f(x) + f(x-u)| \leqslant cu$, то $\bar{e}_\mu(f) < 2c/\mu$.*

Доказательство. В силу четности $\Psi_\mu(u)$ $f_\mu(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\Psi_\mu(u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,\Psi_\mu(u)\,du$. Учитывая (2), получим $|f(x) - f_\mu(x)| < 2c/\mu$.

Следствие. Если $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$, имеет p равномерно-непрерывных производных и $|f^{(p)}(x+u) - 2f^{(p)}(x) + f^{(p)}(x-u)| \leqslant cu$, то

$e_\mu(f) < 2^{2p+1} c / \mu^{p+1}$. В силу очевидного неравенства $\bar{E}_\mu(f) \leqslant \bar{e}_\mu(f)$ теоремы 1, 2, 3 и их следствия имеют место для $\bar{E}_\mu(f)$.

Отметим, что сформулированные для $\bar{E}_\mu(f)$ следствия теорем 1 и 2 при $0 < \alpha < 1$ и теорема 3 с ее следствием допускают обращения, являющиеся следствиями теорем Бернштейна ([4], гл. V, § 3).

Принимая во внимание, что $E_n(f) \leqslant e_n(f) = \bar{e}_{\lambda_{n+1}}(f)$, из теорем 1, 2, 3 и их следствий получим оценки для $E_n(f)$ и $e_n(f)$.

Легко видеть, что порядок убывания $e_n(f)$ зависит как от структурных свойств приближаемой функции, так и от характера роста неотрицательных членов последовательности $\{\lambda_k\}$.

Остановимся на двух частных случаях.

1) $\lambda_n \geqslant dn$ при $n > n_0$. Тогда при $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$ и $n \geqslant n_0$ $e_n(f) < 5\left(1 + \frac{1}{d}\right)\omega_f\left(\frac{1}{n+1}\right)$; если, кроме того, $f(x)$ имеет p равномерно-непрерывных производных и $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}_c \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то $e_n(f) < \frac{5^{p+1} c}{d^{p+\alpha}} \frac{1}{(n+1)^{p+\alpha}}$.

2) $\lambda_{k+1}/\lambda_k \geqslant \theta > 1$ при $k \geqslant 1$. Тогда для $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$ и $n \geqslant 1$ $e_n(f) < 5(1 + 1/\lambda_1)\omega_f(1/\theta^n)$; если, кроме того, $f(x)$ имеет p равномерно-непрерывных производных и $f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}_c \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то $e_n(f) < \frac{5^{p+1} c}{\lambda_1^{p+\alpha}} \frac{1}{(\theta^{p+\alpha})^n}$.

3. Теорема 4. *Если* $f(x) \in L\{\lambda_k\}$, *то* $E_n(f) \sim R_n(f) \sim \alpha_n(f)$; *точнее,* $E_n(f) \leqslant R_n(f) \leqslant \alpha_n(f) \leqslant c_3(\theta) E_n(f)$.

Теорема 5. *Если* $f(x) \in L\{\lambda_k\}$, $q_k \to \infty$ *монотонно и при всех* $k > k_0$ $\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}} < \frac{\lambda_{m_k} - \lambda_{m_k-1}}{\lambda_{m_k} + \lambda_{m_k-1}}$ *, то имеет место асимптотическое равенство*

$$E_n(f) \approx R_n(f) \approx \alpha_n(f).$$

Доказательство этих теорем основано на двух леммах, которые заменяют использованные в ([2]) теоремы Сидона и Валле-Пуссена.

Лемма 1. *Если ряд* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x}$ $(k \neq 0;\ \lambda_k > 0,\ \lambda_k < \lambda_{k+1}$ *при* $k \geqslant 1;\ \lambda_{-k} = -\lambda_k)$ *сходится равномерно и* $\lambda_{k+1}/\lambda_k \geqslant \theta > 8$ *при* $k \geqslant 1$, *то* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leqslant c(\theta) \sup_x \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x} \right|$, *где* $c(\theta) = \frac{4\theta}{\theta - 8}$.

Лемма 2. *Пусть комплексная функция* $f(x)$ *вещественного аргумента* x *определена и ограничена на всей оси. Частоты* $\{\lambda_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ *фиксированы и* $\max_k \{|\lambda_k|\} = \lambda$. *Если найдется сумма* $\sum_{k=1}^{N} c_k^{(0)} e^{i\lambda_k x}$ *такая, что в бесконечной последовательности точек* $\{x_l\}$

$$(l = 0, 1, \ldots;\ x_l < x_{l+1};\ x_{l+1} - x_l \leqslant \frac{\pi}{\mu};\ \mu > \lambda)\ \mathrm{Re}\left\{f(x_l) - \sum_{k=1}^{N} c_k^{(0)} e^{i\lambda_k x_l}\right\} =$$

$$= (-1)^l B_l, \quad B_l \geqslant B > 0, \quad \text{то} \quad \inf\left\{\sup_x \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\lambda_k x_l} \right|\right\} \geqslant B.$$

При доказательстве теорем 4 и 5 применяется также следующее известное положение ([3], гл. I, § 10):

---

* Это условие заведомо выполняется, если при $k > k_0$ $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant d > 0$ и $\lambda_{m_k+1} \geqslant \frac{2}{d} \lambda_{m_k}^2$.

Если $\Psi_{a,b}(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{a,b}(x)\,e^{-iux}\,dx$, *где* $\varphi_{a,b}(x)=1$ *при* $|x|\leqslant a$, $\varphi_{a,b}(x)=\frac{1}{(b-a)}(b-|x|)$ *при* $a<|x|<b$, $\varphi_{a,b}(x)=0$ *при* $|x|\geqslant b$, *то:*

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Psi_{a,b}(u)|\,du\leqslant\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}$;

2) *для любой почти-периодической* $f(x)\sim\sum\limits_{k}A_k\,e^{i\Lambda_k x}$, *показатели Фурье которой не имеют предельной точки на конечном расстоянии,*

$$f_{a,b}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x+u)\,\Psi_{a,b}(u)\,du=\sum_{|\Lambda_k|<b}\varphi_{a,b}(\Lambda_k)\,A_k\,e^{i\Lambda_k x}.$$

Отсюда для $f(x)\in L\{\lambda_k\}$ следует неравенство

$$R_{m_k}(f)\leqslant\left[1+\frac{2}{\pi}\left(2+\ln\frac{\theta+1}{\theta-1}\right)\right]E_{m_k}(f)=c_1(\theta)\,E_{m_k}(f). \tag{3}$$

Доказательство теоремы 4. На основании леммы 1, ввиду равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}A_{\lambda_{m_k}}e^{i\lambda_{m_k}x}$ ([3], гл. I, § 10),

$$\alpha_n(f)\leqslant c(\theta)\,R_n(f). \tag{4}$$

Из (4) при $n=m_k$ и принимая во внимание (3), получим

$$\alpha_{m_k}(f)\leqslant c(\theta)\,c_1(\theta)\,E_{m_k}(f)=c_2(\theta)\,E_{m_k}(f). \tag{5}$$

Если $m_{k-1}<n<m_k$, то $\alpha_n(f)=|A_{\lambda_{m_k}}|+|A_{\lambda_{m_{-k}}}|+\alpha_{m_k}(f)$.

1) При $\alpha_{m_k}(f)\geqslant\frac{c_2(\theta)}{1+c_2(\theta)}\{|A_{\lambda_{m_k}}|+|A_{\lambda_{m_{-k}}}|\}$ из (5) получим

$$\alpha_n(f)\leqslant[1+2\,c_2(\theta)]\,E_{m_k}(f)\leqslant[1+2\,c_2(\theta)]\,E_n(f).$$

2) При $\alpha_{m_k}(f)<\frac{c_2(\theta)}{1+c_2(\theta)}\{|A_{\lambda_{m_k}}|+|A_{\lambda_{m_{-k}}}|\}$ в точках $x_l^{(k)}=(l\pi-\varphi_{m_k})/\lambda_{m_k}$, где $\varphi_{m_k}=\arg A_{\lambda_{m_k}}=-\arg A_{\lambda_{m_{-k}}}$, имеем

$$\operatorname{Re}\left\{f(x_l^{(p)})-\sum_{|m_\nu|\leqslant n}A_{\lambda_{m_\nu}}e^{i\lambda_{m_\nu}x_l^{(k)}}\right\}=(-1)^l B_l,\quad\text{где } B_l>\frac{|A_{\lambda_{m_k}}|+|A_{\lambda_{m_{-k}}}|}{1+c_2(\theta)}.$$

По лемме 2 $E_n(f)\geqslant\frac{|A_{\lambda_{m_k}}|+|A_{\lambda_{m_{-k}}}|}{1+c_2(\theta)}$ и $\alpha_n(f)\leqslant[1+2\,c_2(\theta)]\,E_n(f)$. Таким образом, при всех n $\alpha_n(f)\leqslant[1+2\,c_2(\theta)]\,E_n(f)=c_3(\theta)\,E_n(f)$, а неравенства $E_n(f)\leqslant R_n(f)\leqslant\alpha_n(f)$ очевидны. Отметим, что для $f(x)\in L\{\lambda_k\}$ имеет место очевидное порядковое равенство $E_n(f)\sim e_n(f)$.

Доказательство теоремы 5 в техническом отношении весьма сходно с доказательством теоремы 2 статьи ([2]). При выполнении условий теоремы 5 $E_n(f)\asymp e_n(f)$.

Выражаю глубокую благодарность проф. И. П. Натансону за постановку вопросов и руководство работой.

Куйбышевский
авиационный институт

Поступило
5 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Л.—М., 1949. [2] С. Б. Стечкин, ДАН, 76, № 1 (1951). [3] Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, М., 1953. [4] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.