Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 5

МАТЕМАТИКА

В. А. МАРЧЕНКО

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ПО ФАЗАМ РАССЕЯННЫХ ВОЛН

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VI 1955)

1. Рассеяние частиц центрально-симметрическим полем с быстро убывающей потенциальной энергией $V(r)$ определяется через фазы рассеянных волн $\eta_l(k)$, которые находятся из асимптотической формулы для нормированных радиальных функций $R_{kl}(r)$. Как известно (1), фазы $\eta_l(k)$ $(0 \leqslant k < \infty)$, вообще говоря, не определяют однозначно потенциальной энергии $V(r)$. С другой стороны, в работах (2,3) было доказано, что значения в нуле нормированных радиальных функций $R_{k0}(0)$ $(l = 0)$ на всем энергетическом спектре (включая отрицательные уровни энергии) однозначно определяют потенциальную энергию, и задача о восстановлении ее по этим данным очень естественна с математической точки зрения. Так как $R_{k0}(0)$ при $k^2 \geqslant 0$ могут быть в принципе найдены по фазе s-рассеяния $\eta_0(k)$ $(0 \leqslant k^2 < \infty)$, то для восстановления потенциальной энергии достаточно знать $\eta_0(k)$ $(0 \leqslant k < \infty)$, отрицательные уровни энергии и величины $R_{k0}(0)$, соответствующие этим отрицательным уровням. Однако полученное в (3) нелинейное интегральное уравнение, к которому сводится в простейшем случае эта задача, оказалось слишком сложным. Исчерпывающее решение и анализ задачи о восстановлении потенциальной энергии по значениям $R_{k0}(0)$ на всем спектре был дан в известных работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана (4), сведшим ее к линейному интегральному уравнению, и М. Г. Крейна (5).

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u''(x) - V(x)u(x) + \mu u(x) = 0 \quad (u(0) = 0), \tag{1}$$

из которого определяются радиальные функции при $l = 0$. Если потенциальная энергия убывает достаточно быстро, то спектр соответствующего оператора непрерывен при $\mu \geqslant 0$ и дискретен при $\mu < 0$. Обозначим нормированные решения уравнения при $\mu \geqslant 0$ через $u(\lambda, x)$ $(\lambda = \sqrt{\mu})$, а собственные функции, отвечающие отрицательным дискретным уровням μ_k, — через $u(\lambda_k, x)$ $(\lambda_k = \sqrt{-\mu_k})$. Тогда при $x \to \infty$ имеют место асимптотические формулы:

$$u(\lambda, x) \approx \sqrt{2/\pi}\sin[\lambda x + \eta_0(\lambda)] = \varphi(\lambda, x) \quad (\lambda^2 \geqslant 0); \tag{2}$$

$$u(\lambda_k, x) \approx m_k e^{-\lambda_k x} = \varphi(\lambda_k x) \quad (\lambda_k = \sqrt{-\mu_k}), \tag{2'}$$

где нормировочные коэффициенты $\sqrt{2/\pi}$ и m_k выбраны так, что разложение δ-функции имеет следующий вид:

$$\delta(x - y) = \int_0^x u(\lambda, x)u(\lambda, y)\,d\lambda + \sum_k u(\lambda_k, x)u(\lambda_k, y). \tag{3}$$

Заметим, что правые части формул (2), (2′) являются решениями уравнений

$$y''(x) + \mu y(x) = 0 \quad (\mu = \lambda^2 \text{ или } \mu = -\lambda_k^2). \tag{4}$$

Если потенциальная энергия $V(x)$ равна нулю при $x \geqslant N$, то асимптотические формулы (2), (2′) переходят в точные равенства при $x \geqslant N$. Следовательно, в этом случае функции $u(\lambda, x)$ и $\varphi(\lambda, x)$ удовлетворяют одним и тем же начальным данным в точке $x = N$. Это позволяет выразить функции $u(\lambda, x)$ через $\varphi(\lambda, x)$ при помощи операторов преобразования ([6]). Действительно, согласно теореме 1.2.1 в ([3]) имеем:

$$u(\lambda, x) = \varphi(\lambda, x) + \int_x^{2N-x} A(x, t)\varphi(\lambda, t)\, dt,$$

$$\varphi(\lambda, y) = u(\lambda, y) - \int_y^{2N-y} B(y, t)u(\lambda, t)\, dt,$$

$$A(x, x) = B(x, x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} V(t)\, dt.$$

В связи с исследованием формул обращения, порождаемых несамосопряженными краевыми задачами, Б. Я. Левин доказал *, что подобные операторы существуют при единственном ограничении

$$\int_0^{\infty} x|V(x)|\, dx < \infty, \tag{5}$$

только в этом случае верхний предел интегрирования нужно заменить на ∞. Условие (5) мы везде в дальнейшем предполагаем выполненным. Тогда, согласно теореме Б. Я. Левина, будем иметь:

$$u(\lambda, x) = \varphi(\lambda, x) + \int_x^{\infty} A(x, t)\varphi(\lambda, t)\, dt, \tag{6}$$

$$\varphi(\lambda, y) = u(\lambda, y) - \int_x^{\infty} B(y, t)u(\lambda, t)\, dt, \tag{6′}$$

$$A(x, x) = B(x, x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} V(t)\, dt.$$

3. Для ядер $A(x, y)$ и $B(x, y)$ можно получить такие уравнения при $x < y$:

$$F(x, y) = A(x, y) + \int_0^x A(t, x)A(t, y)\, dt, \tag{I}$$

$$f(x, y) = -B(x, y) + \int_y^{\infty} B(x, t)B(y, t)\, dt, \tag{II}$$

$$f(x, y) + A(x, y) + \int_x^{\infty} f(y, t)A(x, t)\, dt = 0, \tag{III}$$

где функции $F(x, y)$ и $f(x, y)$ находятся по фазе $\eta_0(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$, собственным значениям — μ_k и нормировочным коэффициентам m_k **.

Уравнение (I) аналогично нелинейному уравнению работы ([3]), а уравнения (II), (III) — нелинейному и линейному уравнениям И. М. Гельфанда — Б. М. Левитана ([4]). Наиболее удобным является, конечно, линейное уравнение, к выводу которого мы и перейдем.

---

* Доложено на семинаре в Харьковском государственном университете в марте 1955 г.

** Все эти данные находятся из асимптотического поведения функций $u(\lambda, x)$ на бесконечности.

Умножив обе части формулы (6′) на $u(\lambda, x)$ при $y > x$ и суммируя по λ, получим в силу (3):

$$\int_0^\infty u(\lambda, x)\varphi(\lambda, y)\,d\lambda + \sum_k u(\lambda_k, x)\varphi(\lambda_k, y) =$$

$$= \delta(y-x) - \int_y^\infty B(y,t)\delta(t-x)\,dt = \delta(y-x), \qquad (7)$$

так как $B(y, x) = 0$ при $y > x$. Умножая равенство (6) на $\varphi(\lambda, y)$ и суммируя по λ, получим:

$$\int_0^\infty u(\lambda, x)\varphi(\lambda, y)\,d\lambda + \sum_k u(\lambda_k, x)\varphi(\lambda_k, y) =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\lambda, x)\varphi(\lambda, y)\,d\lambda + \sum_k \varphi(\lambda_k, x)\varphi(\lambda_k, y) +$$

$$+ \int_x^\infty A(x,t)\left[\int_0^\infty \varphi(\lambda, t)\varphi(\lambda, y)\,d\lambda + \sum_k \varphi(\lambda_k, t)\varphi(\lambda_k, y)\right]dt. \qquad (8)$$

Полагая

$$f(x,y) = \int_0^\infty \left[\varphi(\lambda, x)\varphi(\lambda, y) - \frac{2}{\pi}\sin\lambda x \sin\lambda y\right]d\lambda + \sum_k \varphi(\lambda_k, y)\varphi(\lambda_k, x), \qquad (9)$$

получим:

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda, x)\varphi(\lambda, y)\,d\lambda + \sum_k \varphi(\lambda_k, x)\varphi(\lambda_k, y) = f(x,y)\delta(x-y).$$

Подставим это выражение в формулу (8). Тогда при $y > x$

$$\int_0^\infty u(\lambda, x)\varphi(\lambda, y)\,d\lambda + \sum u(\lambda_k, x)\varphi(\lambda_k, y) =$$

$$= f(x,y) + \delta(x-y)\int_x^\infty A(x,t)[f(t,y) + \delta(t-y)]\,dt =$$

$$= f(x,y) + A(x,y)\int_x^\infty A(x,t)f(t,y)\,dt + \delta(x-y).$$

Сопоставляя полученное равенство с формулой (7), окончательно получим:

$$f(x,y) + A(x,y) + \int_x^\infty A(x,t)f(t,y)\,dt = 0.$$

Заметим, что фаза $\eta_0(\lambda)$ удовлетворяет условию $e^{2i\eta_0(\lambda)} = e^{-2i\eta_0(-\lambda)}$. Используя это равенство и выражая в формуле (9) функции $\varphi(\lambda, x)$ через экспоненциалы, получим:

$$f(x,y) = f(x+y) = \sum_k m_k^2 e^{-\lambda_k(x+y)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty [e^{2i\eta_0(\lambda)} - 1]\,e^{i\lambda(x+y)}d\lambda. \qquad (10)$$

4. Докажем теперь, что уравнение (III) при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ имеет единственное решение. Для этого заметим, что фаза $\eta_0(\lambda)$ является аргументом некоторой аналитической в нижней полуплоскости функции $A(z)$ при $z = \lambda$. Функция $A(z)$ имеет в нижней полуплоскости только простые нули, лежащие в точках $-i\lambda_k$ и, возможно, в точке $z = 0$ (если имеется виртуальный энергетический уровень), а $A(z) \to 1$ при $|z| \to \infty$ (см. [3]). Мы рассмотрим для простоты случай $A(0) \neq 0$ (доказательство при $A(0) = 0$ аналогично).

Пусть при некотором $x = x_0 \geqslant 0$ однородное уравнение

$$\int_{x_0}^{\infty} f(y+t)\,a(t)\,dt + a(y) = 0$$

имеет ненулевое решение $a(y)$, которое без ограничения общности можно считать вещественным. Тогда

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty} f(y+t)\,a(y)\,a(t)\,dy\,dt + \int_{x_0}^{\infty} a^2(y)\,dy = 0,$$

или, согласно (10):

$$\sum_k m_k^2 E^2(-i\lambda_k) - \frac{1}{2\pi}\int E^2(-\lambda)\left[e^{2i\eta_0(\lambda)} - 1\right]d\lambda + \int_{x_0}^{\infty} a^2(y)\,dy = 0, \quad (11)$$

где функция $E(\lambda) = \int_{x_0}^{\infty} a(y)\,e^{-i\lambda y}dy$ аналитическая и ограниченная в нижней полуплоскости. Так как $a(y) = 0$ при $y < x_0$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E^2(-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} a(y)\,a(-y)\,dy = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |E(-\lambda)|^2 d\lambda = \int_{x_0}^{\infty} a^2(y)\,dy,$$

и равенство (11) перепишется так:

$$\sum_k m_k^2 E^2(-i\lambda_k) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{E^2(-\lambda)\,e^{2i\eta_0(\lambda)} - |E(-\lambda)|^2\right\}d\lambda = 0. \quad (12)$$

Из определения функции $E(\lambda)$ и вещественности $a(y)$ следует, что $E(-i\lambda)$ вещественно и $E^2(-i\lambda_k) \geqslant 0$. Поэтому равенство (12) может иметь место только в том случае, когда $E(-i\lambda_k) = 0$ и $|E(-\lambda)|^2 = E^2(-\lambda)\,e^{2i\eta_0(\lambda)}$, т. е. $E^2(\lambda) = |E(\lambda)|^2 e^{2i\eta_0(\lambda)}$. Следовательно, аргумент функции $A^2(z)$ на вещественной оси ($2\eta_0(\lambda)$) равен аргументу функции $E^2(z)$ и нули функции $A(z)$ являются одновременно нулями функции $E(z)$. Поэтому функция $E^2(z)A^{-2}(z)$ аналитична в нижней полуплоскости и вещественна на вещественной оси. В силу принципа симметрии ее можно аналитически продолжить на всю плоскость, причем, так как $A(z) \to 1$ при $|z| \to \infty$, полученная целая функция будет ограниченной, т. е. константой. Эта константа должна быть равна нулю, так как $\int_{-\infty}^{\infty} |E(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$. Следовательно, $E(z) = 0$ и $a(y) = 0$. Таким образом, уравнение (III) имеет единственное решение.

5. Исходя из уравнения (III), можно мотодом, аналогичным методу И. М. Гельфанда — Б. М. Левитана, выяснить, каким свойствам должна удовлетворять функция $\eta_0(\lambda)$ для того, чтобы существовало уравнение вида (1), решения которого удовлетворяют асимптотическим формулам (2), (2′). Эта задача будет рассмотрена отдельно.

Харьковский государственный
педагогический институт
им. Г. С. Сковороды

Поступило
29 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Bargman, Phys. Rev., 75, 2, 301 (1949). [2] В. А. Марченко, ДАН, 72, № 3 (1955). [3] В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. общ., 1, 328 (1951). [4] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 309 (1951). [5] М. Г. Крейн, ДАН, 88, 405 (1953). [6] А. Я. Повзнер, Матем., сборн., 23 (65) : 1, 3 (1948).