Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ТРАЕКТОРИЙ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 V 1955)

Рассмотрим измеримый сепарабельный марковский процесс $x(t)$ в метрическом пространстве $\mathcal{E}$ (t пробегает отрезок $I=[a, b]$ числовой прямой). Предметом настоящей работы является изучение распределений вероятностей для случайных величин

$$\zeta(s, t)=\int_s^t V(\tau, x(\tau))\,d\tau, \tag{1}$$

где $V(\tau, x)$ — измеримая функция на $I\times\mathcal{E}$, принимающая комплексные значения.

Обозначим через $C(s, x, t)$ пространство измеримых функций $x(\tau)$ на отрезке $[s, t]$ со значениями из $\mathcal{E}$, удовлетворяющих условию $x(s)=x$. Соответствующее нашему процессу (условное) распределение вероятностей в пространстве $C(s, x, t)$ будем обозначать $\mu_{s,x,t}$. Пусть M — измеримое множество в пространстве $\mathcal{E}$. Совокупность функций $x(\tau)$ из $C(s, x, t)$, для которых $x(t)\in M$, обозначим $C(s, x, t, M)$. Заметим, что вероятности перехода рассматриваемого процесса даются формулой $P(s, x, t, M)=\mu_{s,x,t}C(s, x, t, M)$.

Исследование распределений для функционалов (1) можно свести к исследованию функций

$$\psi(s, x, t, M)=\int_{C(s, x, t, M)} e^{\zeta(s,t)}d\mu_{s,x,t}. \tag{2}$$

Изучение функционалов (1) было начато Кацем ([1]), который рассматривал случай винеровского процесса и функции V, не зависящей от τ. В нашей заметке ([2]) было указано для функции ψ функциональное уравнение (3) и давался метод выведения из него дифференциальных уравнений. Тот же метод развивается в монографии Блан-Лапьера и Форте ([3], гл. 7). Как в ([2]), так и в ([3]) этот метод проводится лишь в случае одномерного диффузионного процесса, причем вопрос о единственности решения полученного дифференциального уравнения не рассматривается. Опираясь на теорию полугрупп, можно дать весьма простое и общее решение вопроса в однородном случае (см. теоремы 7 и 8). В неоднородном случае функция ψ удовлетворяет простому интегральному уравнению (теорема 2, (4)). Это уравнение содержится в ([3]), но его вывод проводится там более сложным методом, требующим стеснительных ограничений на процесс и функционал. Разложение функции ψ в ряд строится в теореме 3.

§ 1. Общий (неоднородный) случай.

Теорема 1. *Пусть при всех* $x\in\mathcal{E}$, $s, t\in I$

$$E(|e^{\zeta(s,t)}|\,|\,x(s)=x)<\infty.$$

Тогда функция $\psi(s, x, t, M)$ *при фиксированных* s, x, t *является вполне аддитивной функцией ограниченной вариации от множества* M, *при фиксированном* M *измерима относительно* s, x, t *и удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\int_{\mathcal{E}} \psi(s, x, \tau, dy)\, \psi(\tau, y, t, M) = \psi(s, x, t, M). \tag{3}$$

Эта теорема доказывается в [2, 3].

Теорема 2. *Если для всех* $x \in \mathcal{E}$, $s, t \in I$:

а) $E(|e^{\zeta(s,t)}| \,|\, x(s) = x) < K_1 < \infty$,

б) $\int_s^t \left[\int_{\mathcal{E}} P(s, x, \tau, dy)\, |V(\tau, y)| \right] d\tau < K_2 < \infty$,

то функция ψ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\psi(s, x, t, M) = P(s, x, t, M) + \int_s^t \left[\int_{\mathcal{E}} P(s, x, \tau, dy)\, V(\tau, y)\, \psi(\tau, y, t, M) \right] d\tau. \tag{4}$$

Доказательство. Функция $e^{\zeta(s,t)}$ абсолютно непрерывна относительно s и поэтому равна интегралу от своей производной:

$$e^{\zeta(s,t)} = 1 - \int_s^t V(\tau, x(\tau))\, e^{\zeta(\tau,t)}\, d\tau.$$

Интегрируя это равенство по $C(s, x, t, M)$ и используя теорему Фубини, получим (4).

Теорема 3. *Пусть для всех* $x \in \mathcal{E}$ $|V(s, x)| \leqslant K(s)$, *причем* $\int_a^b K(s)\, ds = K < \infty$. *Тогда*

$$\psi(s, x, t, M) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(s, x, t, M), \tag{5}$$

где

$$\psi_0(s, x, t, M) = P(s, x, t, M), \tag{6}$$

$$\psi_{n+1}(s, x, t, M) = \int_s^t d\tau \left[\int_{\mathcal{E}} P(s, x, \tau, dy)\, V(\tau, y)\, \psi_n(\tau, y, t, M) \right].$$

При этом

$$|\psi_n(s, x, t, M)| \leqslant \frac{K^n}{n!},$$

так что ряд (5) *сходится равномерно и абсолютно при всех* s, x, t, M.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, для некоторых фиксированных значений* s, x:

а) $V(\tau, y)$ *непрерывна в точке* s, x;

б) *какова бы ни была окрестность* U *точки* x, *если* $t_1 < t_2 < s$ *и* $t_1 \to s$, *то*

$б_1$) $P(t_1, x, t_2, \mathcal{E} \setminus U) \to 0$;

$б_2$) $\int_{\mathcal{E} \setminus U} P(t_1, x, t_2, dy)\, |V(t_2, y)| \to 0$.

Положим

$$u(s,t,x)=\int_{\mathscr{E}} P(s,x,t,dy)\,f(y),\quad w(s,t,x)=\int_{\mathscr{E}}\psi(s,x,t,dy)\,f(y),\qquad (7)$$

где $f(y)$ *— ограниченная измеримая функция на* $\mathscr{E}$, *непрерывная в точке* x.

Тогда при $h\to 0$

$$\frac{w(s-h,s,x)-u(s-h,s,x)}{h}\to V(s,x)\,f(x).\qquad (8)$$

Доказательство. Из условия а) теоремы 2 и ограниченности $f(x)$ следует ограниченность $w(s,t,x)$. Из (4) и (7)

$$\Delta=w(s-h,s,x)-u(s-h,s,x)=$$

$$=\int_{s-h}^{s}d\tau\left[\int_{\mathscr{E}}P(s-h,x,\tau,dy)\,V(\tau,y)\,w(\tau,s,y)\right].$$

В силу а) и $б_2$) для всякого $\varepsilon>0$ можно выбрать окрестность U точки x и $\delta>0$ так, чтобы для $0<h<\delta$

$$\left|\frac{\Delta}{h}-V(s,x)\frac{1}{h}\int_{s-h}^{s}d\tau\left[\int_{U}P(s-h,x,\tau,dy)\,w(\tau,s,y)\right]\right|<\varepsilon.\qquad (9)$$

Опираясь на $б_1$), выводим, что при $h\to 0$ интегральный член в (9) стремится к $V(s,x)f(x)$. Отсюда следует (8).

§ 2. Однородный случай. В однородном случае мы обозначаем вероятности перехода через $P(t,x,M)$. Предположим что выполнены условия:

А) Если U — любая окрестность точки x, то $P(t,x,U)\to 1$ при $t\to 0$.

Б) Какова бы ни была непрерывная ограниченная функция $f(y)$ в пространстве $\mathscr{E}$, функция $\int_{\mathscr{E}}P(t,x,dy)\,f(y)$ при любом t непрерывна относительно x.

Обозначим через C банахово пространство всех ограниченных по модулю непрерывных функций, определенных в пространстве $\mathscr{E}$ и принимающих комплексные значения ($\|f\|=\sup_{x\in\mathscr{E}}|f(x)|$). Условимся писать $f_n\Rightarrow f$ ($f_n,\ f\in C$), если при любом $x\in\mathscr{E}$ $f_n(x)\to f(x)$ и $\|f_n\|$ ограничены. В силу Б) формула

$$(T_tf)(x)=\int_{\mathscr{E}}P(t,x,dy)\,f(y)$$

определяет однопараметрическое семейство преобразований T_t пространства C. Это семейство является полугруппой (т. е. $T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_1+t_2}$) и удовлетворяет условиям:

а) для любого $f\in C$ при $t\to 0$ $T_tf\Rightarrow f$;

б) если $f_n\Rightarrow f$, то $T_tf_n\Rightarrow T_tf$;

в) $\|T_t\|\leqslant 1$.

Если для $f\in C$ при $t\to 0$ существует предел $\frac{T_tf-f}{t}\Rightarrow F$, то полагаем $f\in D_A$, $F=Af$. Определенный этим условием в области D_A линейный оператор A назовем бесконечно малым (сокращенно б. м.) оператором полугруппы T_t или б. м. оператором марковского процесса $P(t,x,M)$ (ср. [4, 5]).

Теорема 5. *Если для двух марковских процессов* $P_1(t, x, M)$, $P_2(t, x, M)$ *в метрическом пространстве* C (*удовлетворяющих условию* Б) *совпадают б. м. операторы, то* $P_1(t, x, M) = P_2(t, x, M)$.

Теорема 6. *Пусть* T_t *однопараметрическая полугруппа операторов в пространстве* C, *удовлетворяющая условиям* а) — в), *и пусть* A — *ее б. м. оператор. Тогда для любого* $f \in D_A$ *функция* $u_t = T_t f$ *удовлетворяет уравнению* $du_t/dt = Au_t$ *и является единственным ограниченным по норме решением этого уравнения, удовлетворяющим начальному условию* $u_t \Rightarrow f$ *при* $t \to 0$

В однородном случае естественно предполагать, что функция $V(x, t)$ из формулы (1) зависит только от x.

Теорема 7. *Если* $V \in C$, *то формула*

$$S_t f = \int_{\mathcal{E}} \psi(0, x, t, dy) f(y) = \int_{C(0, x, t)} e^{\zeta(0,t)} f(x(t))\, d\mu_{0, x, t}$$

определяет однопараметрическую полугруппу операторов в пространстве C, *удовлетворяющую условиям* а) — б) *и условию* $\| S_t \| \leqslant e^{\|V\| t}$. *Ее б. м. оператор* A_1 *равен* $A + V$, *где* A — *б. м. оператор марковского процесса, а* V — *оператор умножения на функцию* $V(x)$. *При этом* $D_{A_1} = D_A$.

Доказательство. Условия теорем 2, 3 и 4 выполнены. Из теоремы 3 следует, что $S_t f \in C$, если $f \in C$. Соотношение $S_{t_1} S_{t_2} = S_{t_1 + t_2}$ вытекает из уравнения (3). Условия б) и $\| S_t \| \leqslant e^{\|V\| t}$ выполняются очевидным образом. Опираясь на теорему 3, легко доказать, что при $h \to 0$ $\dfrac{S_h f - T_h f}{h} \Rightarrow Vf$. Отсюда видно, что выполнено условие а) и что пределы $\dfrac{S_h f - f}{h}$ и $\dfrac{T_h f - f}{h}$ существуют или не существуют одновременно и отличаются слагаемым Vf.

Теорема 8. *Характеристическая функция*

$$\varphi(\lambda; t, x) = E\left(e^{i\lambda\zeta(0,t)} \,\middle|\, x(0) = x\right)$$

является единственным решением уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi + i\lambda V\varphi, \tag{10}$$

удовлетворяющим начальному условию $\varphi \Rightarrow 1$ *при* $t \to 0$ *и условию* $\varphi e^{-\|V\| t}$ *ограничена при* $t \to \infty$ (A — *б. м. оператор марковского процесса*).

Доказательство. Рассмотрим полугруппу S_t, соответствующую функции $i\lambda V$. В силу теоремы 7 ее б. м. оператор равен $A_1 = A + i\lambda V$. Поскольку $T_t 1 = 1$, то $1 \in D_{A_1} = D_A$. Имеем $\varphi(\lambda; t, x) = S_t 1$. Применяя теорему 6 к полугруппе $\tilde{S}_t = e^{-tk} S_t$ ($k = \| V \|$), заключаем, что $\tilde{\varphi} = e^{-tk}\varphi = \tilde{S}_t 1$ является единственным ограниченным по норме решением уравнения $d\tilde{\varphi}/dt = A_1\tilde{\varphi} - k\tilde{\varphi}$, удовлетворяющим условию $\tilde{\varphi} \Rightarrow 1$ при $t \to 0$. Отсюда видно, что φ является единственным решением уравнения (10), удовлетворяющим сформулированным в теореме условиям.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Kac, Trans. Am. Math. Soc., 65, 1 (1949). [2] Е. Б. Дынкин, Укр. матем. журн., 6, № 1, 21 (1954). [3] A. Blanc-Lapierre, R. Forte, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953. [4] W. Feller, Trans. Am. Math. Soc., 77, № 1, 1 (1954). [5] W. Feller, Ann. of Math., 60, № 3, 417 (1954).