Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. А. ДИКИЙ

ОБ АСИМПТОТИКЕ И НЕКОТОРЫХ ТОЖДЕСТВАХ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 11 VII 1955)

Рассматривается оператор

$$Au \equiv -u'' + p(x)u, \quad u'(0) = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Пусть $p(x)$ неограниченно дифференцируема, оператор гипермаксимален и имеет положительный спектр. Пусть

$$\theta(x, y; t) = \int_0^t \omega(x, \lambda)\,\omega(y, \lambda)\,d\rho(\lambda)$$

спектральная функция оператора (ядро интегрального оператора E_t). Обозначим

$$Mf(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\,dt;$$

$M^k f$ — результат k таких осреднений. Через $\int_0^{\infty(k)}$ будем обозначать интеграл, суммированный средними k-го порядка, т. е. $\lim\limits_{T\to\infty}\int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right)^k f(t)\,dt$.

Теорема 1. *Существуют числа* r_i (*определяемые формулами* (7)) *такие, что при* $x, y \neq 0$

$$M^{2k+2}\left[\theta(x, y; t-1) - \sum_{n=0}^{k} r_i t^{-i+1/2}\right] = O\left(t^{-k-1/2+\varepsilon}\right) \quad \text{при } t\to\infty. \tag{1}$$

Теорема 2.

$$\int_0^{\infty(2k+1)} t^{k-1}\left\{\theta(x, y; t-1) - \sum_{n=0}^{k} r_i t^{-i+1/2}\right\} dt = 0 \quad (x, y \neq 0). \tag{2}$$

1. Введем вспомогательный оператор

$$\hat{A}u \equiv -u'' + \hat{p}(x)u,$$

где $\hat{p} = p$ при $x < T$; $\hat{p} = 0$ при $x > 2T$. Рассмотрим резольвенты обоих операторов;

$$R_z(x, y) = \omega(x, z)\,[\omega_1(y, z) + h(z)\,\omega(y, z)]$$

и

$$\hat{R}_z = \omega(x, z)\,[\omega_1(y, z) + \hat{h}(z)\,\omega(y, z)],$$

где $x < y < T$; $\omega(x, z)$ есть решение уравнения $A\omega = z\omega$ при условиях

$\omega(0, z) = 1$, $\omega'(0, z) = 0$; функция $\omega_1(x, z)$ — решение того же уравнения, но $\omega_1(0, z) = 0$, $\omega_1'(0, z) = 1$. Коэффициент $h(z)$ выбран так, что $\omega_1 + h\omega$ — функция из L_2.

Оценим разность

$$R_z - \hat{R}_z = [h(z) - \hat{h}(z)]\,\omega(x, z)\,\omega(y, z).$$

Значение $h(z)$ должно лежать внутри круга радиуса $r = \dfrac{1}{2\,|\operatorname{Im} z|\int_0^T |\omega(x, z)|^2\,dx}$ (см. [1], стр. 105); как радиус, так и центр зависят от $p(x)$ лишь на отрезке $[0, T]$, где оба оператора A и $\hat{A}$ совпадают. Поэтому

$$|h(z) - \hat{h}(z)| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im} z|\int_0^T |\omega(x, z)|^2\,dx} \leqslant \frac{Ce^{-2T\operatorname{Im}\sqrt{z}}}{|\operatorname{Im} z|}, \quad \operatorname{Im}\sqrt{z} > 0$$

(мы воспользовались известным представлением $\omega(x, z) = \cos\sqrt{z}x + \int_0^x k(x, y)\cos\sqrt{z}\,y\,dy$). Поэтому и

$$|R_z - \hat{R}_z| \leqslant \frac{Ce^{-2T\operatorname{Im}\sqrt{z}}}{|\operatorname{Im} z|}.$$

Рассмотрим разность $\hat{R}_z - R_z^*$, где R_z^* — резольвента оператора $Bu \equiv -u''$; $u'(0) = 0$. Обозначим через $S_N(z)$ разность

$$S_N(z) = (\hat{A} - z)^{-1} - \sum_{l=0}^{N}\sum_{m=0}^{l}(-1)^{\frac{l+m}{2}} F_{l, m}(x)\left(i\frac{d}{dx}\right)^m (B - z)^{-1-\frac{l+m}{2}}. \quad (3)$$

Здесь $F_{l, m}(x)$ — функции от x, определяемые рекуррентными соотношениями:

$$F_{0, 0} \equiv 1; \quad F_{0, m} = 0\ (m > 0); \quad F_{l, m} = 0 \text{ при } l \text{ или } m < 0;$$
$$F_{l+2, m}(x) = \hat{p}(x) F_{l, m}(x) - F_{l, m}''(x) + 2iF_{l+1, m-1}'. \quad (4)$$

Отсюда, в частности, следует, что $F_{l, m} = 0$, если $l + m$ нечетно.

К обеим частям (3) слева применим оператор $\hat{A} - z$. Справа переставим этот оператор с функциями F, воспользовавшись соотношениями коммутации:

$$(\hat{A} - z) F_{l, m} = F_{l, m}(B - z) + 2iF_{l, m}'\left(i\frac{d}{dx}\right) - F_{l, m}'' + pF_{l, m}.$$

При этом в силу (4) взаимно уничтожатся все слагаемые, соответствующие индексу l, меньшему чем $N + 1$. Итак, $(\hat{A} - z) S_N(z)$ есть комбинация операторов вида $f(x)\left(i\frac{d}{dx}\right)^m (B - z)^{-k}$, где $2N + 2 \geqslant 2k \geqslant N + m + 1$. Отсюда нетрудно получить следующую оценку: при $x \neq 0$ на контуре Γ_α (см. рис. 1) остаток $S_N(z; x, y)$ по модулю не превосходит $\dfrac{C}{\alpha^{N+2}(|z| + 1)^{N/2+1}}$, где C не зависит от α.

Имеем теперь

$$R_z(x, y) = \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=0}^{l} (-1)^{\binom{l+m}{2}} F_{l,m}(x) \left(i \frac{d}{dx}\right)^m R_z^{\left(1+\frac{l+m}{2}\right)} + T_N(z), \qquad (5)$$

где

$$|T_N(z)| \leqslant \frac{C}{\alpha^{N+2}(|z|+1)^{N/2+1}} + \frac{Ce^{-2T \operatorname{Im} \sqrt{z}}}{\operatorname{Im} z} \leqslant \frac{C}{\alpha^{N+2}(|z|+1)^{N/2+1}}.$$

Здесь $R_z^{\left(1+\frac{l+m}{2}\right)}$ — итерация резольвенты.

2. Построим «дзета-функцию» дифференциального оператора:

$$Z(s; x, y) = \int_0^\infty (t+1)^{-s}\, d\theta(x, y; t) \quad (\operatorname{Re} s > 1/2).$$

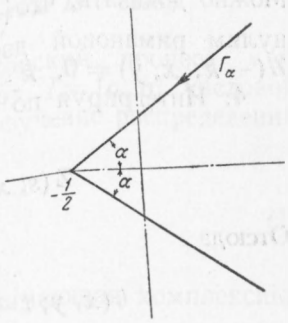


Рис. 1

Z^* — то же для оператора B. Можно видеть, что

$$Z(s; x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} (z+1)^{-s} R_z(x, y)\, dz.$$

Из (5) имеем

$$Z(s; x, y) = \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=0}^{l} \binom{-s}{\frac{l+m}{2}} F_{l,m}(x) \left(i \frac{d}{dx}\right)^m Z^*\left(s + \frac{l+m}{2}; x, y\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} (z+1)^{-s} T_N(z; x, y)\, dz. \qquad (6)$$

Остаточный член — функция, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -N/2$. При помощи (6) легко аналитически продолжить $Z(s; x, y)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > -N/2$, так как Z^* — известная функция,

$$Z^*(s; x, y) = \int_0^\infty (t+1)^{-s} \cos \sqrt{t}\, x \cos \sqrt{t}\, y\, d\left(\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\right).$$

Функция $\left(i \frac{d}{dx}\right)^m Z^*(s; x, y)$ при $x \neq y$ или при $x = y$, m нечетном — целая, при $x = y$, m четном — мероморфная с простыми полюсами в точках $s = \frac{m-2k+1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, с вычетами $\frac{1}{2\pi} \binom{-\frac{m-2k+1}{2}}{k}$, где $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!}$. Поэтому Z имеет полюсы (при $x = y$) в точках $s = -n + 1/2$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ с вычетами

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) r_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=0}^{l} F_{2l,2m}(x) \binom{n-1/2}{l+m} \binom{n-1/2-l-m}{n-l}. \qquad (7)$$

3. Обозначив $s=\mu+i\nu$, доказываем, что при $\nu\to\infty$, $\mu<{}^1/_2$, $|Z|<$ $<C_\mu|\nu|^{-2\mu+1+\varepsilon}$. Для членов разложения (6), содержащих Z^*, это сводится к простому исследованию известной функции Z^*.

Оценим остаточный член. Выберем α теперь так, чтобы $\alpha=\frac{1}{|\nu|+1}$. Пусть $\mu=-N/2+1$. Тогда остаток в формуле (6) оценивается как

$$Ce^{\alpha|\nu|}\frac{1}{\alpha^{N+2}}\int_1^\infty \rho^{-2}d\rho\leqslant C|\nu|^{-2\mu+4}.$$

Но по известному следствию из теоремы Фрагмена — Линделёфа ([2]) и тому, что при $\mu={}^1/_2$ $|Z|<C$, можно получить требуемое утверждение. Можно доказать, что $\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)^m Z^*(-k,\ x,\ y)=0$, аналогично тривиальным нулям римановой дзета-функции. Отсюда из (6) легко вывести, что $Z(-k,\ x,\ y)=0$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

4. Интегрируя по частям, получим

$$Z(s;\ x,\ y)=-s\int_1^\infty (t+1)^{-s-1}\theta(x,\ y;\ t)\,dt.$$

Отсюда

$$\theta(x,\ y;\ t-1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^s\frac{Z(s;\ x,\ y)}{-s}\,ds,\quad \gamma>{}^1/_2.$$

Теперь

$$\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2k+1}t^{k-1}\theta(x,\ y;\ t-1)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{(2k+1)!\ T^{s+k}Z(s;\ x,\ y)\,ds}{(s+k)(s+k+1)\ldots(s+k+2k+1)\,s},\quad \gamma>{}^1/_2.$$

Переносим путь интегрирования влево:

$$\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2k+1}t^{k-1}\theta(x,\ y;\ t-1)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-k-1/2+\varepsilon-i\infty}^{-k-1/2+\varepsilon+i\infty}\frac{(2k+1)!\ T^{s+k}Z(s;\ x,\ y)\,ds}{(s+k)(s+k+1)\ldots(s+k+2k+1)\,s}+$$

$$+\sum_{n=0}^{k}\frac{(2k+1)!\ T^{-n+1/2+k}(n-{}^1/_2)\,r_n}{(-n+{}^1/_2+k)(-n+{}^1/_2+k+1)\ldots(-n+{}^1/_2+k+2k+1)(-n+{}^1/_2)}.$$

Интеграл в правой части есть $O(T^{-1/2+\varepsilon})$, а сумму можно записать как $-\sum_{n=0}^{k}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2k+1}t^{k-1}t^{-n+1/2}r_n$. Этим теорема 2 доказана. Аналогично доказывается теорема 1.

Поступило
4 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, М.—Л., 1950.
[2] Э. Ч. Титчмарш, Теория функций, М.—Л., 1951.