Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. С. БАХВАЛОВ

К ОЦЕНКЕ ОШИБКИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫМ МЕТОДОМ АДАМСА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 VII 1955)

§ 1. Постановка задачи. Пусть ищется решение $y(x)$ уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Пусть приближенные значения $\bar{y}_m$ величин $y_m = y(x_m)$ $(x_m = x_0 + mh,\ m = 0, 1, \ldots, n)$ находятся каким-либо специальным способом при $m = 0, 1, 2, \ldots, k$, а при $m > k$ вычисляются по рекуррентной формуле (см., например, [2])

$$\bar{y}_{m+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} \bar{y}_{m-\lambda} + h \sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_{m-\lambda}) + \beta_{m+1},$$

где β_{m+1} — «ошибка округления».

Введем в рассмотрение решения $\bar{y}_m(x)$ уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $\bar{y}_m(x_m) = \bar{y}_m$, и обозначим

$$R_m = \bar{y}_m - y_m, \quad R_m(x) = \bar{y}_m(x) - y(x),$$
$$\Delta_m = \bar{y}_m - \bar{y}_{m-1}(x_m), \quad \Delta_m(x) = \bar{y}_m(x) - \bar{y}_{m-1}(x).$$

Очевидное тождество

$$R_n = R_k \frac{R_k(x_n)}{R_k} + \sum_{m=k+1}^{n} \Delta_m \frac{\Delta_m(x_n)}{\Delta_m} \tag{2}$$

показывает, как ошибка R_n после n-го шага получится из ошибки R_k после первых k шагов и из ошибок Δ_m шагов с номерами $m = k+1$, $k+2, \ldots, n$. Несколько искусственный вид формулы (2) оправдан тем, что отношения $R_k(x_n)/R_k$ и $\Delta_m(x_n)/\Delta_m$ допускают простую оценку.

Допустим, что решения $y(x)$, $\bar{y}_m(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} Y_1(x) \leqslant y(x) \leqslant Y_2(x), \\ Y_1(x) \leqslant \bar{y}_m(x) \leqslant Y_2(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Оценки (3) могут быть значительно грубее, чем искомая окончательная оценка ошибки R_n. Обычно такую грубую «предварительную оценку» найти можно.

Пусть при $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$, $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$ удовлетворяются неравенства

$$a(x) \leqslant f_y(x, y) \leqslant A(x).$$

Легко показать, что

$$\exp\int_{x_k}^{x_n} a(x)\,dx \leqslant \frac{R_k(x_n)}{R_k} \leqslant \exp\int_{x_k}^{x_n} A(x)\,dx,$$
$$\exp\int_{x_m}^{x_n} a(x)\,dx \leqslant \frac{\Delta_m(x_n)}{\Delta_m} \leqslant \exp\int_{x_m}^{x_n} A(x)\,dx. \tag{4}$$

Формулы (2) и (4) давали бы удовлетворительное решение вопроса об оценке R_n, если бы были найдены хорошие оценки ошибок Δ_m. Обычно вместо Δ_m рассматривают «принципиальные ошибки метода» ρ_m, определяемые формулой

$$\rho_{m+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\bar{y}_m(x_{m-\lambda}) + h\sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_m(x_{m-\lambda})) - \bar{y}_m(x_{m+1}).$$

Эти ошибки допускают оценку через частные производные функции $f(x, y)$. В простейшем случае метода Эйлера

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + hf(x_m, \bar{y}_m) + \beta_{m+1}$$

имеет место тождество

$$\Delta_m = \rho_m + \beta_m.$$

Возникает вопрос о том, в каких других случаях имеет место хотя бы приближенное равенство $\Delta_m \sim \rho_m + \beta_m$. В следующем параграфе будет показано, что при достаточно малых h так обстоит дело для метода Адамса.

§ 2. Оценка для метода Адамса. В этом случае

$$\bar{y}_{m+1} = \bar{y}_m + h\sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_{m-\lambda}) + \beta_{m+1}; \tag{5}$$

$$\bar{y}_m(x_{m+1}) = \bar{y}_m + h\sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_m(x_{m-\lambda})) - \rho_{m+1}. \tag{6}$$

Специальный вид коэффициентов $v_{-\lambda}$ в дальнейшем несущественен, так что доказанные далее теоремы имеют несколько более широкий круг применений.

Будем предполагать, что при $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$, $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$ имеет место неравенство

$$|f_y(x, y)| \leqslant \alpha, \tag{7}$$

и положим

$$\omega = e^{k\alpha h}.$$

Легко видеть, что при $|r - s| \leqslant k$

$$|\Delta_m(x_r)| \leqslant \omega|\Delta_m(x_s)|, \quad |R_m(x_r)| \leqslant \omega|R_m(x_s)|. \tag{8}$$

Положим

$$V = \sum_{\lambda=1}^{k} \lambda |v_{-\lambda}|. \tag{9}$$

Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если*

$$\alpha\omega V h < 1, \tag{10}$$

$$|R_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\omega} \quad \textit{для } m = 0, 1, \ldots, k, \tag{11}$$

$$|\rho_m + \beta_m| \leqslant \varepsilon \textit{ для } m = k+1,\ k+2, \ldots, n, \tag{12}$$

то при $m = k+1,\ k+2, \ldots, n$

$$|\Delta_m - \rho_m - \beta_m| \leqslant \frac{\alpha\omega V h}{1 - \alpha\omega V h}\varepsilon. \tag{13}$$

Доказательство теоремы 1. Из (5) и (6) получаем

$$\Delta_{m+1} = \bar{y}_{m+1} - \bar{y}_m(x_{m+1}) = \rho_{m+1} + \beta_{m+1} +$$

$$+ h\sum_{\lambda=1}^{k} v_{-\lambda}\{f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_{m-\lambda}) - f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_m(x_{m-\lambda}))\}. \tag{14}$$

В силу (7) и (8) справедливы неравенства

$$|f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_{m-\lambda}) - f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_m(x_{m-\lambda}))| \leqslant \alpha |\bar{y}_{m-\lambda} - \bar{y}_m(x_{m-\lambda})| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\sum_{\mu=0}^{\lambda-1} |\Delta_{m-\mu}(x_{m-\lambda})| \leqslant \alpha\omega \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} |\Delta_{m-\mu}|. \tag{15}$$

Положив $S_m = \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|, \ldots, |\Delta_m|\}$, получим из (12), (14) и (15)

$$S_{m+1} \leqslant \max\{\varepsilon + \alpha\omega V h S_m, S_m\}. \tag{16}$$

Для S_k из (8), (11) и неравенства $|\Delta_m(x)| \leqslant |R_m(x)| + |R_{m-1}(x)$ получим

$$S_k \leqslant \varepsilon. \tag{17}$$

Из (16) и (17) по индукции (от m к $m+1$) получаем

$$S_m \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - \alpha\omega V h}. \tag{18}$$

Из (9), (14), (15) и (18) следует (13).

Из (2), (4) и (18) получаем при условиях (10)—(12)

$$|R_n| \leqslant |R_k| \exp \int_{x_k}^{x_n} A(x)\,dx + \sum_{m=k+1}^{n} |\rho_m + \beta_m + \psi h\varepsilon| \exp \int_{x_m}^{x_n} A(x)\,dx, \tag{19}$$

где множитель $\psi = \frac{\alpha\omega V}{1 - \alpha\omega V h}$ при $h \to 0$ стремится к αV.

Из (19) можно получить более простые оценки R_n. Например, если $k\alpha h \leqslant {}^1/_5$, $\alpha V h \leqslant {}^3/_{10}$, $|R_m| \leqslant {}^2/_5\,\varepsilon$ при $m = 1, 2, \ldots, k$, $|\rho_m + \beta_m| \leqslant \varepsilon$ при $m = k+1,\ k+2, \ldots, n$, то $|R_n| \leqslant n\varepsilon(1 + 2\alpha V h)\,\frac{e^{\alpha(x_n - x_0)} - 1}{\alpha(x_n - x_0)}$.

Полученные результаты можно использовать и для вывода асимптотических выражений остатка R_n при $n \to \infty$ в предположении, что $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$. Например, справедлива теорема:

Теорема 2. *Если в некоторой области, окружающей истинное решение на отрезке* $a \leqslant x \leqslant b$, *вторая производная* $d^2 f(x, y)/dy^2$ *ограничена и при* $n \to \infty$ $|R_m| \leqslant h\varphi(h)$ *для* $m = 0, 1, \ldots, k$, $|\rho_m + \beta_m| \leqslant h\varphi(h)$ *для* $m = k+1, k+2, \ldots, n$, *где* $\varphi(h) = O(h)$, *то*

$$R_n = \sum_{m=k+1}^{n} (\rho_m + \beta_m) \exp \int_{x_m}^{b} f_y(x, y(x))\, dx + O(h\varphi(h)).$$

Очевидно, что главный член в последней формуле имеет в общем случае порядок $O(nh\varphi(h)) = O(\varphi(h))$.

Аналогичные теоремы можно получить и для случая, когда интегрирование производится по интерполяционным формулам Адамса.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, М., 1950. [2] М. Р. Шура-Бура, Прикладн. матем. и мех., 16, в. 5, 575 (1952).