Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. И. ЛЮБИЧ

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА НАД ДАННЫМ ВЕКТОРОМ К НЕКОТОРОМУ ЛИНЕЙНОМУ КЛАССУ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 II 1955)

Обозначим через S некоторую линейную комплексную систему и через T — некоторый линейный оператор в S. Область определения оператора T^n, где n — фиксированное целое число >1, обозначим через $\mathfrak{D}_n$.

Пусть в S дано линейное многообразие $\mathfrak{M}$ и пусть известно, что некоторый вектор $x \in \mathfrak{D}_n$, а также вектор $T^n x$ принадлежат $\mathfrak{M}$. Возникает вопрос, будут ли принадлежать $\mathfrak{M}$ промежуточные элементы $Tx, T^2x, \ldots, T^nx$. Этот и близкие к нему вопросы для случая, когда S есть множество функций, суммируемых в каждой конечной части некоторого интервала, $T = d/dt$ и $\mathfrak{M}$ — одно из пространств L^2 или M, изучался в ряде работ ([1-3]), причем в работах ([2,3]) устанавливаются оценки для норм промежуточных элементов.

В настоящей заметке мы хотим показать, что поставленный вопрос может быть исследован одним общим алгебраическим приемом. При этом, по аналогии с леммой Эсклангона ([1]), мы несколько обобщим задачу, заменив условие $T^n x \in \mathfrak{M}$ условием $Q(T)x \in \mathfrak{M}$, где $Q(\lambda)$ — многочлен n-й степени.

Теорема 1. *Пусть существуют n различных вещественных или невещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ таких, что:*

а) *уравнение $Tx - \lambda_k x = \varphi$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ при любом $\varphi \in \mathfrak{M}$ имеет решение $x = \mathfrak{M}$;*

б) *уравнение $P(T)x = 0$, где $P(\lambda) = \prod_{\nu=0}^{n} (\lambda - \lambda_\nu)$, имеет в $\mathfrak{M}$ только тривиальное решение $x = 0$.*

В таком случае из принадлежности элементов $x \in \mathfrak{D}_n$ и $Q(T)x$ к $\mathfrak{M}$ следует, что $T^m x$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $Tx \in \mathfrak{M}$.

Исходя из разложения

$$\frac{Q(\zeta) - Q(\lambda)}{\zeta - \lambda} = \sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu(\lambda)\,\zeta^\nu, \tag{1}$$

введем n векторов $u_k = \sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu(\lambda_k)\,T^\nu x$. В силу (1),

$$Tu_k - \lambda_k u_k = Q(T)x - Q(\lambda_k)x \in \mathfrak{M}.$$

Пусть v_k — решение уравнения

$$Tv_k - \lambda_k v_k = Q(T)x - Q(\lambda_k)x, \tag{2}$$

принадлежащее $\mathfrak{M}$, $w_k = u_k - v_k$. Очевидно, $Tv_k \in \mathfrak{M}$, $Tw_k = \lambda_k w_k$.

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными $x, Tx, \ldots, T^{n-1}x$:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu(\lambda_k)\, T^\nu x = u_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Она разрешима, так как в противном случае существует нетривиальное решение однородной системы

$$\sum_{k=1}^{n} q_\nu(\lambda_k)\,\xi_k = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Тогда из (1) следует

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{Q(\zeta) - Q(\lambda_k)}{\zeta - \lambda_k} = 0,$$

откуда

$$Q(\zeta) \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{P(\zeta)}{\zeta - \lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k Q(\lambda_k) \frac{P(\zeta)}{\zeta - \lambda_k}.$$

Здесь правая часть — многочлен не выше $(n-1)$-й степени, а левая — не ниже n-й, ибо, если $\xi_j \neq 0$, то $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{P(\zeta)}{\zeta - \lambda_k}\Big|_{\zeta=\lambda_j} = \xi_j P'(\lambda_j) \neq 0$.

Решая систему (3), получим $x = v + w$, где v и w — линейные комбинации, соответственно, векторов v_k и w_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Так как $w = x - v \in \mathfrak{M}$ и $P(T)w = 0$, то $w = 0$. Отсюда $Tx = Tv \in \mathfrak{M}$, ч. и т. д.

Применяя теорему 1 к оператору d/dt, можно взять в качестве S совокупность $\tilde{L}$ всех функций $x(t)$ $(t \geqslant 0)$, суммируемых в каждом интервале $(0, t_0)$ $(t_0 > 0)$, а в качестве $\mathfrak{M}$ — линейное многообразие в $\tilde{L}$, для которого существует такое вещественное λ^0, что интеграл $\int_0^\infty \varphi(t+s)\, e^{-\lambda s}\, ds$ сходится при $\lambda > \lambda^0$ на любой $\varphi \in \mathfrak{M}$ и принадлежит $\mathfrak{M}$. Здесь в качестве λ_k достаточно взять n различных чисел на полуоси (λ^0, ∞).

Сформулированному условию, в частности, удовлетворяют классы C_σ^0, M, $L_{1/\sigma}$, L^p $(p > 1)$, из которых первые три определяются следующим образом:

$$C_\sigma^0\colon \quad x(t) \in \tilde{L}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{\sigma(t)} = 0;$$

$$M_\sigma\colon \quad \|x\|_{M_\sigma} \equiv \operatorname{vrai}\max_{0<t<\infty} \frac{|x(t)|}{\sigma(t)} < \infty;$$

$$L_{1/\sigma}\colon \quad \|x\|_{L_{1/\sigma}} \equiv \int_0^\infty \frac{|x(t)|}{\sigma(t)}\, dt < \infty.$$

Здесь $\sigma(t) > 0$ — измеримая функция, подчиненная неравенству $\sigma(t+s) \leqslant \sigma(t)\tau(s)$ $(t, s \geqslant 0)$, где $\tau(s)$ такова, что $\int_0^\infty \tau(s)\, e^{-\lambda s}\, ds < \infty$ для достаточно больших вещественных λ.

Переходя к случаю нормированного многообразия $\mathfrak{M}$, докажем следующее предложение:

Теорема 2. *Пусть резольвента $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ есть ограниченный оператор всюду в $\mathfrak{M}$ при $\lambda > 0$, причем $\|R_\lambda\| \leqslant A/\lambda$ $(A = \text{const})$. Если $x, Tx, \ldots, T^n x$ принадлежат* $\mathfrak{M}$, то*

* Для этого достаточно при сделанном предположении о резольвенте, чтобы уравнение $P(T)x = 0$, где $P(\lambda)$ — некоторый многочлен n-й степени с различными положительными корнями, имело только тривиальное решение в $\mathfrak{M}$.

$$\| T^m x \| \leqslant C_{n,\,m}(A) \| x \|^{\frac{n-m}{n}} \| T^n x \|^{\frac{m}{n}} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (4)$$

где $C_{n,\,m}(A)$ зависят лишь от n, m, A.

Доказательство. Покажем, что на векторах x, удовлетворяющих условию теоремы, выполняется тождество:

$$T^{n-1}x = -\frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-\lambda R_\lambda)^{n-\nu} T^n x + (-1)^n \lambda^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} (\lambda R_\lambda)^{n-\nu} x. \qquad (5)$$

Действительно, если $y \in \mathfrak{M}$ и $Ty \in \mathfrak{M}$, то $R_\lambda T y = T R_\lambda y = (E + \lambda R_\lambda) y$. Отсюда, во-первых,

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-\lambda R_\lambda)^{n-\nu} Ty =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1}(-\lambda R_\lambda)^{n-\nu-1}(E + \lambda R_\lambda) y = y + (-1)^{n-1}\lambda^n R_\lambda^n y.$$

Поэтому правая часть (5) равна

$$T^{n-1}x + (-1)^{n-1}\lambda^n R_\lambda^n T^{n-1}x + (-1)^n \lambda^n R_\lambda (E + \lambda R_\lambda)^{n-1} x = T^{n-1}x.$$

Из (5) следует:

$$\| T^{n-1}x \| \leqslant \frac{A(A^n - 1)\| T^n x \|}{(A-1)\lambda} + A(A+1)^{n-1} \| x \| \lambda^{n-1}. \qquad (6)$$

Минимизируя правую часть (6) по $\lambda > 0$, получаем

$$\| T^{n-1}x \| \leqslant C_{n,\,n-1}(A) \| x \|^{\frac{1}{n}} \| T^n x \|^{\frac{n-1}{n}}, \qquad (7)$$

где

$$C_{n,\,n-1}(A) = nA\left[\frac{(A+1)(A^n-1)}{(n-1)(A-1)}\right]^{\frac{n-1}{n}}. \qquad (8)$$

В частности, теорема доказана при $n = 2$.

Проведем теперь индукцию по n. Пусть утверждение теоремы верно для некоторого $n > 1$. Если $x, Tx, \ldots, T^{n+1}x$ принадлежат $\mathfrak{M}$, то, в силу (7),

$$\| T^n x \| \leqslant C_{n+1,\,n}(A) \| x \|^{\frac{1}{n+1}} \| T^{n+1} x \|^{\frac{n}{n+1}},$$

откуда в сочетании с (4) получается

$$\| T^m x \| \leqslant C_{n+1,\,m}(A) \| x \|^{\frac{n+1-m}{n+1}} \| T^{n+1} x \|^{\frac{m}{n+1}} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где

$$C_{n+1,\,m}(A) = C_{n,\,m}(A) C_{n+1,\,n}^{\frac{m}{n}}(A), \qquad (9)$$

ч. и т. д.

Из формул (8), (9) легко следует явное выражение для $C_{n,\,m}(A)$:

$$C_{n,\,m}(A) = p_{m,\,n} A^{H_{m,\,n-1}} (A+1)^{H_{m+1,\,n}} \prod_{\nu=m+1}^{n} \left(\frac{A^\nu - 1}{A-1}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

где

$$p_{m,n} = \prod_{\nu=m}^{n-1} \frac{(\nu+1)^{\frac{1}{\nu}}}{\nu^{\frac{1}{\nu+1}}}, \quad H_{m,n} = \sum_{\nu=m}^{n} \frac{1}{\nu}.$$

Условия теоремы 2 выполняются для оператора дифференцирования на полуоси $(0, \infty)$ в классе L^p $(p > 1)$, причем $A = 1$, а также в классах M_σ, $L_{1/\sigma}$, если $\tau(s)$ ограничена, причем здесь роль A играет число $\sup_{s \geqslant 0} \tau(s)$.

Отыскание точных констант, входящих в оценки типа (4), представляет в общем случае трудную задачу, решенную для произвольных n, m, насколько нам известно, лишь для оператора дифференцирования в классе функций, ограниченных на всей оси.

В этом случае точные константы $C_{n,m}$ найдены А. Н. Колмогоровым.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность Н. И. Ахиезеру за ценные замечания, сделанные при редактировании настоящей заметки.

Поступило
2 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Esclangon, C. R., **160**, 475 (1915). [2] А. Н. Колмогоров, Уч. зап. МГУ, **30**, 3 (1939). [3] A. Gorny, Acta Math., **71**, 317 (1939).