Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

В. Б. ЛИДСКИЙ

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 III 1955)

1. В теории одного уравнения Штурма — Лиувилля известно следующее предложение: если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — два линейно независимых решения уравнения $y'' + p(t)y = 0$, нормированные некоторым образом в нуле, то вектор $z(t) = y_1(t) + iy_2(t)$ с возрастанием параметра монотонно вращается против часовой стрелки по комплексной плоскости. Указанный факт играет в теории одного уравнения важную роль. Из него, в частности, следуют теоремы Штурма о нулях решений и др. В настоящей работе аналогичные факты устанавливаются для случая канонической системы произвольного числа уравнений.

2. Линейная каноническая система $2k$ дифференциальных уравнений в матричной форме может быть записана следующим образом ([1]):

$$\frac{d}{dt} Y = IH(t)\, Y. \tag{1}$$

В этой формуле $H(t)$ — вещественная симметрическая матрица порядка $2k$, элементы которой мы будем предполагать кусочно-непрерывными функциями параметра t; $Y(t)$ — матрица решений; I — постоянная матрица вида

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(E_k — единичная матрица порядка k).

Матрицы $H(t)$ и $Y(t)$ мы иногда будем записывать в виде

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_3(t) & h_4(t) \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_3(t) & y_4(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $h_s(t)$ и $y_s(t)$ — квадратные матрицы порядка k ($s = 1, 2, 3, 4$). Отметим еще, что система уравнений второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\, y = 0 \tag{4}$$

с симметрической матрицей коэффициентов $P(t)$ является частным случаем канонической системы ([1]).

3. Рассмотрим матрицу решений канонической системы $Y(t)$, нормированную в нуле условием

$$Y(0) = E_{2k}.$$

Матрица $Y(t)$ является симплектической для всех t, иначе говоря, имеет место тождество $Y^*(t)IY(t) = I$ ([2], § 4)*. Из тождества $Y^*(t)IY(t) = I$ нетрудно получить соотношение $Y(t)IY^*(t) = I$. Выполнив в левой части этой формулы перемножение и приравняв одинаково расположенные матрицы порядка k, придем к следующим тождествам:

* Y^* — матрица, сопряженная к матрице Y.

$$y_1(t)\,y_2^*(t) - y_2(t)\,y_1^*(t) = 0; \quad y_1(t)\,y_4^*(t) - y_2(t)\,y_3^*(t) = E_k;$$
$$y_3(t)\,y_4^*(t) - y_4(t)\,y_3^*(t) = 0; \quad y_4(t)\,y_1(t) - y_3(t)\,y_2^*(t) = E_k, \tag{5}$$

которыми воспользуемся в дальнейшем.

4. Обозначим через $z(t)$ матрицу

$$z(t) = y_1(t) + iy_2(t), \tag{6}$$

являющуюся аналогом вектора $z(t)$ (см. п. 1). Покажем, что $z(t)$ — невырожденная матрица. Действительно, $zz^* = y_1y_1^* + y_2y_2^* - i(y_1y_2^* - y_2y_1^*)$, откуда, ввиду первого тождества (5), $zz^* = y_1y_1^* + y_2y_2^*$. Так как строки прямоугольной матрицы (y_1, y_2) линейно независимы, то матрица zz^* невырождена, следовательно, невырожденной является и матрица $z(t)$. Заметим, что попутно мы установили вещественность матрицы $z(t)\,z^*(t)$.

Введем теперь в рассмотрение матрицу

$$u(t) = (y_1(t) - iy_2(t))^{-1}(y_1(t) + iy_2(t)), \tag{7}$$

относительно которой имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Матрица $u(t)$ является унитарной и симметрической при всех значениях параметра t.*

Доказательство. а) Очевидно, что $u = \bar{z}^{-1}z$ (ср. (6) и (7)). В силу вещественности матрицы zz^* имеем $zz^* = \bar{z}\,\bar{z}^*$; используя этот факт, получаем $uu^* = \bar{z}^{-1}zz^*(\bar{z}^{-1})^* = \bar{z}^{-1}\bar{z}\,\bar{z}^*(\bar{z}^*)^{-1} = E_k$. Этим доказана унитарность матрицы $u(t)$.

б) Для доказательства симметричности заметим, что $\bar{u}u = z^{-1}\bar{z}\bar{z}^{-1}z = E_k$. Умножая это соотношение справа на u^* и пользуясь унитарностью u, получаем $\bar{u}(t) = u^*(t)$, чем и доказывается симметричность матрицы $u(t)$.

Теорема 2. *Пусть матрица коэффициентов канонической системы такова, что*

$$h_4(t) > 0\,^*. \tag{8}$$

*Тогда все собственные значения матрицы $u(t)$: $\rho_1(t), \rho_2(t), \ldots, \rho_k(t)$ монотонно вращаются по единичной окружности** против часовой стрелки. Точнее:*

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Arg}\rho_s(t) > 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, k). \tag{9}$$

Для доказательства теоремы мы сперва выводим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет матрица $u(t)$:

$$\frac{d}{dt}u = ir(t)\,u, \tag{10}$$

$r(t) = 2\bar{z}^{-1}(t)\,h_4(t)\,(\bar{z}^{-1}(t))^*$.

При выполнении условия (8) матрица коэффициентов уравнения (10) также является положительно-определенной. Это дает возможность несложной выкладкой установить справедливость неравенств (9).

Приведем вывод уравнения (10). Продифференцируем соотношение $u(t) = \bar{z}^{-1}(t)\,z(t)$ (точка означает дифференцирование):

$$\dot{u} = -\bar{z}^{-1}\dot{\bar{z}}\bar{z}^{-1}z + \bar{z}^{-1}\dot{z} = [-\bar{z}^{-1}\dot{\bar{z}} + \bar{z}^{-1}\dot{z}u^*]\,u. \tag{11}$$

* Т. е. $h_4(t)$ является положительно-определенной матрицей при всех t. Отметим, что в случае системы второго порядка вида (4) $h_4(t) \equiv E_k$ [1], и условие (8) всегда выполнено.

** Собственные значения унитарной матрицы по модулю равны единице.

Обозначим выражение в квадратных скобках через $ir(t)$ и преобразуем его:

$$ir(t) = -\bar{z}^{-1}\dot{\bar{z}} + \bar{z}^{-1}\dot{z}z^*(\bar{z}^{-1})^* = \bar{z}^{-1}(-\dot{\bar{z}}z^* + \dot{z}z^*)(\bar{z}^{-1})^*, \tag{12}$$

далее:

$$-\dot{\bar{z}}z^* + \dot{z}z^* = 2i\,\mathrm{Im}(\dot{y}_1 + i\dot{y}_2)(y_1^* - iy_2^*) = 2i(\dot{y}_2 y_1^* - \dot{y}_1 y_2^*). \tag{13}$$

Заметим, что если в уравнение (1) подставить матрицы $I, H(t)$ и $Y(t)$, записанные в форме (2), (3), то для производных $\dot{y}_1$ и $\dot{y}_2$ получим выражения

$$\dot{y}_1 = h_3(t)\,y_1 + h_4(t)\,y_3; \quad \dot{y}_2 = h_3(t)\,y_2 + h_4(t)\,y_4.$$

Внеся эти выражения в правую часть формулы (13), получим

$$\dot{y}_2 y_1^* - \dot{y}_1 y_2^* = h_3(t)(y_2 y_1^* - y_1 y_2^*) + h_4(t)(y_4 y_1^* - y_3 y_2^*).$$

Обращаясь теперь к формулам (5), заключаем, что $\dot{y}_2 y_1^* - \dot{y}_1 y_2^* = h_4(t)$. Таким образом, формула (12) приобретает вид $ir(t) = 2i\bar{z}^{-1}h_4(t)(\bar{z}^{-1})^*$, и на основании (11) устанавливаем справедливость формулы (10).

Докажем теперь теорему, связывающую нули определителей матриц $y_1(t)$ и $y_2(t)$ с собственными значениями матрицы $u(t)$.

Теорема 3. *Определитель матрицы* $y_2(t)$ (*соответственно* $y_1(t)$) *обращается в нуль при тех и только тех значениях параметра* t, *при которых матрица* $u(t)$ *обладает собственным значением, равным* $+1$ (*соответственно* -1). *При этом размерность нулевого собственного подпространства матрицы* $y_2(t)$ (*и* $y_1(t)$) *равна размерности собственного подпространства матрицы* $u(t)$, *соответствующего собственному значению* $+1$ ($u - 1$) *.

Доказательство. а) Пусть при некотором значении параметра t матрица $u(t)$ обладает собственным значением, равным $+1$, и пусть вектор f принадлежит соответствующему собственному подпространству. Тогда $u(t)f = f$ или $(y_1(t) - iy_2(t))^{-1}(y_1(t) + iy_2(t))f = f$. Применяя к обеим частям этого равенства матрицу $y_1(t) - iy_2(t)$, получим $y_2(t)f = 0$.

б) Пусть теперь, наоборот, при некотором t определитель матрицы $y_2(t)$ обратился в нуль, и пусть вектор f принадлежит нулевому собственному подпространству матрицы. Вектор f, очевидно, можно считать вещественным. Так как $y_2(t)f = 0$, то

$$u(t)f = (y_1(t) - iy_2(t))^{-1}y_1(t)f. \tag{14}$$

Переходя в этом соотношении к комплексно-сопряженным величинам, получаем $\bar{u}(t)f = (y_1(t) + iy_2(t))^{-1}y_1(t)f$. Применим теперь к обеим частям этого равенства матрицу $u(t)$. Пользуясь тем, что $u(t)\bar{u}(t) = u(t)u^*(t) = E_k$, будем иметь

$$f = u(t)(y_1(t) + iy_2(t))^{-1}y_1(t)f = (y_1(t) - iy_2(t))^{-1}y_1(t)f. \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), заключаем, что $u(t)f = f$.

Аналогично проводится доказательство в отношении матрицы $y_1(t)$. Этим заканчивается доказательство теоремы 3.

В заключение сформулируем теорему сравнения для собственных

---

* В ходе доказательства будет установлено, что не только размерности, но и сами подпространства при этом совпадают.

значений двух унитарных матриц вида (7), относящихся к двум каноническим системам.

Теорема 4. *Пусть* $\frac{d}{dt} Y_1 = iH_1(t)\, Y_1$ *и* $\frac{d}{dt} Y_2 = iH_2(t)\, Y_2$ — *две канонические системы, матрицы коэффициентов которых удовлетворяют неравенству*

$$H_1(t) > H_2(t). \tag{16}$$

Тогда непрерывно зависящие от параметра t *собственные значения* $\rho_s^{(1)}$ *и* $\rho_s^{(2)}(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ *унитарных матриц* $u^{(1)}(t)$ *и* $u^{(2)}(t)$, *которые соответствуют рассматриваемым системам по формуле* (7), *можно занумеровать так, чтобы для всех* $t > 0$ *выполнялись неравенства*:

$$\operatorname{Arg} \rho_s^{(1)}(t) > \operatorname{Arg} \rho_s^{(2)}(t)\ *. \tag{17}$$

Другими словами, собственные значения матрицы $u^{(1)}(t)$ *вращаются «впереди» собственных значений матрицы* $u^{(2)}(t)$.

5. Теоремы 2 и 4 в сочетании с теоремой 3 дают возможность доказать теоремы о перемежаемости нулей определителей матриц $y_1(t)$ и $y_2(t)$, а также теоремы сравнения для нулей определителей этих матриц. Эти теоремы вполне аналогичны теоремам Штурма для одного уравнения $y'' + p(t)\, y = 0$ **.

Отметим, что приведенные выше теоремы остаются справедливыми в более широких предположениях: матрица $Y(t)$ может быть нормирована в нуле условием $Y(0) = C_{2k}$, где C_{2k} — произвольная вещественная симплектическая матрица; матрицу $u(t)$ можно строить не только из верхних k строк матрицы $Y(t)$, как это делалось выше, но и из произвольных k строк, номера которых $i_1, i_2, \ldots, i_k$ подчинены единственному условию $|i' - i''| \neq k$. В теореме 2 условие (8) естественно при этом заменяется требованием, чтобы матрица порядка k, получающаяся при вычеркивании из матрицы коэффициентов $H(t)$ k строк и k столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, была положительно-определенной.

Приведенные выше теоремы имеют прямое отношение к вопросам распределения собственных значений краевых задач для канонических систем. Отметим также, что они находятся в тесной связи с теорией устойчивости канонических систем, которой автор настоящей статьи занимался совместно с М. Г. Нейгауз под руководством чл.-корр. АН СССР И. М. Гельфанда. Именно в связи с вопросами устойчивости они и были установлены.

Поступило
8 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, **73**, № 3 (1950). [2] И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский, Усп. матем. наук, **10**, в. 1 (1955). [3] M. Morse, Math. Ann., **103**, 52 (1930).

* Предполагается, что при $t = 0$ в формуле (17) имеет место равенство.

** Для случая системы второго порядка вида (4) теорема о перемежаемости нулей и теорема сравнения нулей не являются новым результатом. Впервые они были получены в работе [3]. Отметим, что во всех известных нам работах по этим вопросам авторы пользуются методами вариационного исчисления.