Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

А. И. ВИНОГРАДОВ

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ТЕОРЕМАХ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 III 1955)

В настоящей заметке излагаются вопросы о сложении двух простых чисел с «редкими» последовательностями.

Теорема 1. *Если достаточно большое число N записать в p-ичной системе счисления $N = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_R p^R$, то достаточно изменить ограниченное абсолютной константой число коэффициентов, каждый на единицу, из них нули на $+1$, чтобы получить сумму двух простых чисел.*

Доказательство ее вытекает из другой, довольно сложной по своей формулировке теоремы.

Теорема 2. *Пусть $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ — некоторое фиксированное целое положительное число $\geqslant 2$. $\varepsilon_n = +1$ либо -1. N — некоторое достаточно большое целое положительное число с условием $N \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\nu}}$, где $\nu > \ln \ln N$ и p_i — простой делитель числа p. $R = [\ln N / \ln p]$. Из всех 2^R систем $(\varepsilon_1 p, \varepsilon_2 p^2, \ldots, \varepsilon_R p^R)$ выбираем одну вполне определенную систему чисел*

$$(\varepsilon_1 p, \varepsilon_2 p^2, \ldots, \varepsilon_R p^R) \tag{1}$$

с заданными значениями ε_i, $1 \leqslant i \leqslant R$; тогда уравнение

$$N = p_1 + p_2 + \varepsilon_{x_1} p^{x_1} + \cdots + \varepsilon_{x_k} p^{x_k} \tag{2}$$

разрешимо в числах (1) при некотором фиксированном k, с условием, что N и pk имеют одинаковую четность, а p_1 и p_2 простые числа.

Если обозначим $N_1 = N - \varepsilon_{x_1} p^{x_1} - \cdots - \varepsilon_{x_k} p^{x_k}$ и положим

$$Q_k(N, p) = \sum_{N_1 > 0} \sum_{N_1 = p_1 + p_2} \ln p_1 \cdot \ln p_2, \tag{3}$$

то имеет место асимптотическое равенство

$$Q_k(N, p) = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + \rho(N), \tag{4}$$

где

$$\mathfrak{S}(N_1) = \prod_{p / N_1} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p \nmid N_1} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right), \quad \rho(N) = B \sqrt{\eta}\, N R^k \tag{5}$$

при $k \geqslant \frac{1}{2\eta} \ln \frac{1}{\eta}$, где $\eta > 0$ — произвольно малое фиксированное число; B — абсолютная константа.

Если же $N \equiv 0 \pmod{p_i^{\nu}}$ и $\nu > \ln \ln N$, то достаточно вычесть не более чем r различных чисел (1) с условием, что $x_i \leqslant r + 1$, чтобы получить число $N' = N - \varepsilon_{x_1} p^{x_1} - \cdots - \varepsilon_{x_l} p^{x_l}$ $(l \leqslant r)$ с условием $N' \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\nu}}$, если $\nu > \ln \ln N$. Но к N' уже применима теорема 2 и,

следовательно, теорема 1 *действительно верна для всех* $N > N_0(p,\eta)$, *так как* r — *число простых делителей* p — *является абсолютной константой при данном* p.

Доказательство этих теорем основано на использовании теорем о нулях $L(s,\chi)$ Дирихле Ю. В. Линника, К. А. Родосского, Пейджа, Зигеля, Н. Г. Чудакова и теорем об оценках тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

Самостоятельный интерес представляет доказательство основной леммы работы.

Основная лемма. *Пусть* $M \leqslant R$, $p^M = Q$, $T(\alpha) = \sum_{n=1}^{M} e^{-\varepsilon_n p^n/N} e^{-2\pi i \alpha \varepsilon_n p^n}$, *где* ε_i, $1 \leqslant i \leqslant M$, — *произвольный набор чисел с условием* $\varepsilon_i = +1$ *либо* -1. *В таком случае мера* ε_η — *тех значений* α, *для которых не выполняется условие* $|T(\alpha)| \leqslant (1-\eta)M$, *имеет оценку*

$$\operatorname{mes} \varepsilon_\eta < Q^{13\sqrt{\eta}}/Q. \tag{6}$$

В соответствии с этой новой оценкой можно снизить константу в работе Ю. В. Линника ([1]) следующим образом: если в работе ([1]) требовалось k_0 степеней двойки, то с оценкой (6) их требуется в тех же теоремах величина порядка $\ln k_0$.

Если принять расширенную гипотезу Римана для всех рядов Дирихле $L(s,\chi)$, то результаты теорем 1 и 2 можно значительно усилить. Положим $M = [(\ln N/\ln p)^{1/m}]$, где $m \geqslant 1$ — некоторое фиксированное целое число. В таком случае имеем:

Условная теорема 1. *Если достаточно большое число* N *записать в* p-*ичной системе счисления* $N = a_0 + a_1 p + \ldots + a_M p^M + \ldots + a_R p^R$, *то достаточно изменить ограниченное абсолютной константой число коэффициентов среди первых* M, *каждый на единицу, из них нули на* $+1$, *чтобы получить сумму двух простых чисел.*

Условная теорема 2. *Уравнение* $N = p_1 + p_2 + \varepsilon_{x_1} p^{x_1} + \ldots + \varepsilon_{x_k} p^{x_k}$ *разрешимо в числах* (1) *при* $x_i \leqslant (\ln N)^\varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ — *сколь угодно малое фиксированное число*; N *и* pk *имеют одинаковую четность. Имеет место также асимптотическое равенство* $Q_k(N,p) = \sum_{N_1 > 0} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + \rho_1(N)$ *аналогично* (4) *при* $\rho_1(N) = Be^{-\frac{1}{\varepsilon}\eta} (1-\eta)^k N M^k$ *для всех* $N > N_0(k,\eta)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
17 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Матем. сборн., 32 (74), № 1, 3 (1953).