Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. В. БОЯРСКИЙ

О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 III 1955)

Общая эллиптическая система уравнений вида

$$v_y = \alpha u_x + \beta u_y, \quad -v_x = \gamma u_x + \delta u_y, \quad 4k^2 \equiv 4\alpha\delta - (\beta+\gamma)^2 > 0$$

может быть всегда ([1]) приведена к каноническому виду

$$v_y = ku_x + \sigma u_y, \quad -v_x = -\sigma u_x + ku_y, \quad \sigma = \frac{\gamma-\beta}{2}$$

(для новых независимых переменных мы сохранили старые обозначения).

Используя комплексную запись $w = u + iv$, $w_z = {}^1/_2(w_x - iw_y)$, $w_{\bar z} = {}^1/_2(w_x + iw_y)$, $z = x + iy$, эту систему удобно записать в виде

$$w_{\bar z} - q(z)\overline{w}_z = 0, \quad q(z) = \frac{2(1-k)+i\sigma}{2(1+k)-i\sigma}. \tag{1}$$

В дальнейшем будем рассматривать обобщенные решения системы (1), предполагая, что в данной области T, в которой рассматривается уравнение (1), $q(z)$ — измеримая функция и существенная верхняя грань $\max \operatorname{vrai} |q(z)| = q_0 < 1$. Для простоты предположим, что T ограничена. Назовем обобщенным решением системы (1) в области T всякую непрерывную в T комплексную функцию $w(z)$, обладающую обобщенными ([3], [4]) производными $w_{\bar z}$ и w_z, которые суммируемы с квадратом в любой замкнутой подобласти T и удовлетворяют уравнению (1).

Теорема 1. *Всякое обобщенное решение $w = w(z)$ уравнения (1) представимо в виде $w(z) = f(\chi(z))$, где $f(\chi)$ — аналитическая функция переменного χ, а $\chi(z)$ — некоторое гомеоморфное преобразование области T на область $\chi(T)$; $\chi(z)$ с сохранением гомеоморфизма продолжается на всю плоскость и удовлетворяет условию Гельдера на всей плоскости (другие свойства $\chi(z)$ см. ([2])).*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\chi_{\bar z} - q_0(z)\chi_z = 0$, где $q_0(z) \equiv q(z)\dfrac{\overline{w}_z}{w_z}$ для $z \in T$ и $w_z(z) \neq 0$, $q_0(z) \equiv q(z)$ для $z \in T$ и $w_z(z) = 0$ и $q_0(z) \equiv 0$ для $z \overline{\in} T$. Очевидно, $|q_0(z)| \leqslant q_0 < 1$. Как доказано в ([2]), существует обобщенное решение $\chi = \chi(z)$ этого уравнения, которое гомеоморфно отображает плоскость z на плоскость χ и непрерывно по Гельдеру.

Обратное преобразование тоже непрерывно и, как доказано в ([2]), функция $w_1(\chi) = w(z(\chi))$ обладает обобщенными производными и они вычисляются по обычным формулам дифференцирования. Опираясь на это, сразу проверяем, что $w_{1\bar\chi} \equiv 0$. Отсюда заключаем ([3]), что $w_1(\chi)$ есть аналитическая в $\chi(T)$. Окончательно имеем $w(z) = w_1(\chi(z))$, что доказывает теорему 1.

Из теоремы 1 и известных свойств аналитических функций можно непосредственно получить ряд выводов о теоретико-функциональных свойствах решений системы (1). Мы укажем только те из них, которые используются в дальнейшем: 1) отображение $w = w(z)$ есть внутреннее отображение; 2) для функции $w = w(z)$ справедливы строгий принцип максимума модуля, принцип аргумента и теорема Руше; 3) нули функции $w = w(z)$ изолированы в T.

Отметим, что теорема 1 сохраняет свою силу также для решений системы (1), обладающих, например, изолированными особенностями. Отсюда можно сделать ряд выводов о поведении решений системы (1) в окрестности изолированных особых точек.

Полученная формула $w(z) = w_1(\chi(z))$ вскрывает структуру всех решений системы (1). Однако, по нашему мнению, принципиальный интерес представляет факт, что система (1) действительно допускает решения приведенной выше структуры. Именно, справедливо обращение теоремы 1. При формулировке соответствующей теоремы ограничимся случаем, когда T есть единичная окружность и, кроме того, $q(0) = 0$, $q(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в точке $z = 0$ (в остальном может допускать произвольные разрывы). Первые два ограничения несущественны, в чем легко убедиться, применяя преобразование неизвестной $w_1 = w - q(0)\overline{w}$ и конформное преобразование независимого переменного (если область T односвязна). Последнее допущение, вообще говоря, также не является существенным, однако оно значительно упрощает все рассуждения.

Теорема 2. *Пусть $f(\chi)$ — произвольная аналитическая функция в единичном круге $|\chi| < 1$. Тогда существует непрерывное преобразование круга $|z| < 1$ на круг $|\chi| < 1$, удовлетворяющее условию $\chi(0) = 0$ и такое, что функция $w(z) = f(\chi(z))$ есть решение уравнения* (1).

Доказательство. Нетрудным подсчетом убеждаемся, что для того, чтобы функция $w(z) = f(\chi(z))$ была решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы $\chi(z)$ была решением квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} - q(z)\frac{\overline{f'(\chi)}}{f'(\chi)}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Докажем, что уравнение (2) всегда допускает решение $\chi(z)$, переводящее гомеоморфно единичный круг $|z| < 1$ в единичный круг $|\chi| < 1$ и удовлетворяющее условию $\chi(0) = 0$. Будем искать такое решение уравнения (2) в виде

$$\chi(z) = z\exp\left[-\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \left(\frac{\omega(t)}{t-z} - \frac{z\overline{\omega(t)}}{1-z\overline{t}}\right)d\tau_t\right] \equiv ze^{T\omega}, \tag{3}$$

где K — единичный круг, а $\omega(t)$ — некоторая комплексная функция. Используя формулы $\frac{\partial T\omega}{\partial \overline{z}} = \omega(z)$ и $\frac{\partial T\omega}{\partial z} \equiv S\omega = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_K \left[\frac{\omega(t)}{(t-z)^2} - \frac{\overline{\omega(t)}}{(1-z\overline{t})^2}\right]d\tau_t$ и подставляя (3) в (2), получаем для $\omega(z)$ нелинейное уравнение

$$\omega - q(z)\frac{\overline{f'(\chi)}}{f'(\chi)}\frac{\overline{\chi}}{\chi}\overline{S\omega} = \frac{q}{z}\frac{\overline{f(\chi)}}{f'(\chi)}\frac{\overline{\chi}}{\chi}. \tag{4}$$

χ следует рассматривать как оператор от ω (нелинейный). Нетрудно убедиться ([1]), что $S\omega$ определяется во всем пространстве L_2 и что $\|S\omega\|_{L_2} \leqslant \|\omega\|_{L_2}$. На основании теоремы Кальдерона — Зигмунда ([5]) убеждаемся, что $S\omega$ ограничен в любом L_p, $p > 1$, $\|S\omega\|_{L_p} \leqslant A_p\|\omega\|_{L_p}$, и что $A_p q_0 < 1$ для $|2-p| < \varepsilon$ при достаточно малом ε. Фиксируем одно такое $p > 2$, настолько мало отличающееся от 2,

чтобы интеграл $\iint_K \left|\frac{q}{z}\right|^p d\tau_z$ сходился, и будем вести все дальнейшие рассуждения в фиксированном пространстве L_p. $T\omega$ вполне непрерывным образом переводит пространство L_p в пространство функций, непрерывных в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Очевидно, имеем $|\chi(z)|=1$ для $|z|=1$. Если ω есть решение уравнения (4), то нетрудно видеть, что $\|\omega\|_{L_p}\leqslant C$, C не зависит от ω. Обозначим через Ω множество тех $\omega\in L_p$, $\|\omega\|_{L_p}\leqslant C$, для которых $|\chi(z)|\leqslant 1$ для всех $|z|\leqslant 1$. Очевидно, Ω есть выпуклое и замкнутое множество в L_p. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi - q(z)\frac{\overline{f'(\chi)}\,\overline{\chi}}{f'(\chi)\,\chi}\,\overline{S\varphi} = \frac{q}{z}\frac{\overline{f'(\chi)}\,\overline{\chi}}{f'(\chi)\,\chi}. \tag{5}$$

Уравнение (5) определяет некоторый оператор $\varphi=\varphi(\omega)$ на множестве Ω. Действительно, оно однозначно разрешимо, ибо к нему применим принцип сжатых отображений. Докажем, что оператор $\varphi=\varphi(\omega)$ переводит Ω в себя. В самом деле, рассмотрим функцию $\chi_\varphi = ze^{T\varphi}$, где $\varphi=\varphi(\omega)$, $\omega\in\Omega$. Очевидно, она удовлетворяет уравнению $(\chi_\varphi)_{\bar z} - q_1(z)(\overline{\chi_\varphi})_z = 0$ с $q_1(z)\equiv q(z)\frac{\overline{f'(\chi_\omega)}}{f'(\chi_\omega)}\frac{\overline{\chi}_\omega}{\chi_\omega}\frac{\chi_\varphi}{\overline{\chi}_\varphi}$. На основании доказанного ранее строгого принципа максимума для уравнения (1) получаем, что $|\chi_\varphi|<1$ для $|z|<1$ ибо $|\chi_\varphi|=1$ для $|z|=1$, т. е. $\varphi\in\Omega$. Пусть ω_n — некоторая последовательность функций, принадлежащих Ω. Пусть $\varphi_n=\varphi(\omega_n)$. Так как $T\omega$ вполне непрерывно, то можно выбрать такую подпоследовательность n_k, $k=1,2,\ldots$, что $\chi_{n_k}=ze^{T\omega_{n_k}}$ сходится равномерно в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Тогда, очевидно, последовательность $\tilde q_{n_k}(z)=q(z)\frac{\overline{f'(\chi_{n_k})}}{f'(\chi_{n_k})}\frac{\overline{\chi}_{n_k}}{\chi_{n_k}}$ будет сходиться по мере к некоторой функции $\tilde q(z)$. Аналогично как в [2] доказываем, что φ_{n_k} сходится по норме L_p. Итак, уравнение (5) определяет некоторый вполне непрерывный оператор $\varphi=\varphi(\omega)$, переводящий ограниченное замкнутое и выпуклое множество Ω банахова пространства L_p в свою часть. По теореме Шаудера [6] оператор $\varphi=\varphi(\omega)$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку ω_0. Очевидно, ω_0 есть решение уравнения (4). Таким образом, разрешимость уравнения (4), а тем самым и (3) доказана.

Очевидно, приведенные выводы о решениях уравнения (1) переносятся дословно на решения квазилинейного уравнения (2). Поэтому доказательство того, что построенная функция $\chi=\chi(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение круга $|z|<1$ на круг $|\chi|<1$ не представляет затруднений.

Теорема 2 позволяет устанавливать существование решений системы (1), обладающих многими свойствами аналитических функций. Например, в качестве простого следствия из теоремы 2 получаем теорему Римана о возможности (квазиконформного) отображения друг на друга двух любых односвязных областей при помощи решений системы (1), причем так, чтобы наперед заданная точка одной области перешла в наперед заданную точку другой области.

Заметим, что приведенный выше метод доказательства теоремы 2 годится также и в том случае, когда уравнение (1) не линейное, а квазилинейное.

Теорема 1, несмотря на простоту своего доказательства, оставалась до сих пор (в нашей формулировке) неизвестной, так что неко-

торые авторы ([7]) в само понятие обобщенного решения системы (1) даже включали некоторые свойства, которые автоматически присущи такому решению. При сильных ограничениях на коэффициенты системы (1) теорема 1 в неполной формулировке имеется, например, у Берса ([8]), однако там она выводится из общей теории внутренних отображений, принадлежащей Стойлову.

Настоящая работа использует приемы исследования дифференциальных уравнений эллиптического типа, разработанные в последнее время И. Н. Векуа. В заключение хочу выразить искреннюю благодарность И. Н. Векуа за ценную помощь при овладении этими методами.

Поступило
25 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, ДАН, **100**, № 2 (1955). [2] Б. В. Боярский, ДАН, **102**, № 4 (1955). [3] И. Н. Векуа, ДАН, **89**, № 5 (1953). [4] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа, Л., 1950. [5] A. Calderon, A. Zygmund, Acta Math., 88, 85 (1952). [6] J. Schauder, Studia Math., **2** (1930). [7] Б. В. Шабат, Матем. сборн., **17** (59), 193 (1945). [8] L. Bers, Theory of Pseudoanalytic Functions, N. Y., 1953.