Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 III 1955)

1°. Обозначим через C пространство всех непрерывных на сегменте $[-1, 1]$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$.

Пусть $U_n(f) = U_n(f, x)$ — линейная операция из C в C, переводящая любую $f \in C$ в алгебраический многочлен степени не выше $(n-1)$.

Мы будем говорить, что $U_n(f, x)$ есть W-операция, если для любой $f \in C$

$$\|U_n(f) - f\|_C \to 0, \quad n \to \infty.$$

Классический результат С. Н. Бернштейна — Г. Фабера утверждает, что не существует матрицы узлов

$$\begin{gathered} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} x_2^{(2)} \\ \dots\dots \\ x_1^{(n)} x_2^{(n)} \dots x_n^{(n)} \\ \dots\dots\dots \\ -1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} \leqslant \dots x_n^{(n)} \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{1}$$

при которой соответствующий интерполяционный процесс Лагранжа $L_n(f, x)$ является W-операцией. С. Н. Бернштейн [1] показал, что в случае равноотстоящих узлов промежутка $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} x_k^{(2n+1)} &= -1 + \frac{k-1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, (2n+1), \quad n = 1, 2, \dots; \\ x_k^{(2n+2)} &= -1 + \frac{2(k-1)}{2n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, (2n+2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2}$$

$\{L_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится при любом $x \neq 0$ из $(-1, 1)$ даже для функции $f(x) = |x|$. Позже Марцинкевич [2] и Грюнвальд [3] построили такую $f \in C$, для которой процесс $\{L_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится всюду в $[-1, +1]$ при узлах П. Л. Чебышева

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2n-2k+1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

которые в известном смысле наилучшие.

Указанные отрицательные результаты показывают, что представляет интерес построение интерполяционных процессов, отличных от $L_n(f, x)$, являющихся W-операциями. Подобные процессы были построены Джексоном, Фейером и С. Н. Бернштейном [4].

Особый интерес заслуживают интерполяционные процессы С. Н. Бернштейна, которые строятся по схеме

$$U_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)}(f)\, l_k^{(n)}(x), \tag{4}$$

где $\{l_k^{(n)}(x)\}_{k=1}^n$ — фундаментальные полиномы Лагранжа n-й строчки матрицы (1) и $\{m_k^{(n)}(f)\}_{k=1}^n$ — функционалы.

В первом интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна $U_n^{\{p\}}(f, x)$ числа $m_k^{(n)}(f)$ определяются из равенств

$$m_k^{(n)}(f) = f(x_k), \quad k \not\equiv 0 \pmod{2p}, \quad n = n_0, \ n_0+1, \ \ldots;$$

$$m_{2pt}^{(n)}(f) = \sum_{j=1}^{p} f(x_{2p(t-1)+2j-1}^{(n)}) - \sum_{j=1}^{p-1} f(x_{2p(t-1)+2j}), \tag{4а}$$

где p — произвольное фиксированное натуральное число.

Во втором интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна $U_n^{\{p\}}(f, x)$*

$$m_k^{(n)}(f) = 2^{-2p} \sum_{\nu=-p}^{p} C_{2p}^{\nu+p} f(x_{k+\nu}^{(n)}),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n; \ n = n_0, \ n_0+1, \ \ldots, \tag{4б}$$

где $x_{k+\nu}^{(n)} = x_k^{(n)}$, если $k+\nu \leqslant 0$ или $k+\nu > n$.

2° В работах ([5], [6]) указан некоторый достаточно широкий класс матриц узлов (1), при которых $U_n^{\{p\}}(f, x)$ и $\tilde{U}_n^{\{p\}}(f, x)$ одновременно суть W-операции. Возникает естественный вопрос: всегда ли операции $U_n^{\{p\}}(f)$ и $\tilde{U}_n^{\{p\}}(f)$ одновременно сходятся? Ответ на этот вопрос дает теорема:

Теорема 1. *Операция $U_n^{\{p\}}(f)$, построенная для $f(x) \equiv x$ при узлах* (2) *и $p = 1$, расходится при любом $x \neq 0$ из* $(-1, 1)$, *когда $n \to \infty$. Операция $\tilde{U}_n^{\{p\}}(f)$, построенная для $f(x) \equiv x$ при узлах* (2) *и $p = 1$, сходится при любом $x \in |-1, 1|$ к x, когда $n \to \infty$.*

Заметим, что первая часть теоремы 1 доказана в ([7]).

3°. В ([6]) доказано, что если в (4а) $f(x_k^{(n)})$ заменить числом

$$\frac{1}{x_{k+1}^{(n)} + x_k^{(n)}} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(t)\, dt, \tag{4в}$$

то полученный процесс для весьма широкого класса узлов сходится при любой измеримой ограниченной функции. В этой связи представляет интерес теорема:

Теорема 2. *Операция $U_n^{\{p\}}(f)$, построенная при помощи чисел* (4в) *для $f(x) \equiv x$ при узлах* (2) *и $p = 1$, расходится во всех точках $x \neq 0$ из* $(-1, 1)$.

4°. Результаты ([6]) и теорема 1 естественно приводят к следующему вопросу: является ли $\tilde{U}^{\{p\}}(f)$ W-операцией при любой системе узлов. Ответ на этот вопрос дает теорема:

Теорема 3. *Операция $\tilde{U}^{\{p\}}(f)$, построенная для $f(x) = |x|$ при узлах* (2) *и $p = 1$, расходится при любом x из* $(-1, 1)$.

5°. В ([8]) изучалась скорость сходимости процесса $U_n^{\{p\}}(f)$ при уз-

---

* С. Н. Бернштейн рассматривал лишь случай $p = 1$.

лах П. Л. Чебышева ([3]). Относительно скорости сходимости $\tilde{U}_n^{\{p\}}(f)$ при узлах (3) справедлива теорема:

Теорема 4. *Пусть* $f \in C$; *тогда при узлах* (3) *справедливо неравенство* $|\tilde{U}_n^{\{2\}}(f, x) - f(x)| \leqslant (12\sqrt{2} + 2{,}5\,|T_n(x)|\pi^2)\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$, *где* $\omega(h)$ *модуль непрерывности функции* $f(x)$ *и* $T_n(x) = \cos n \arccos x$.

Следствие. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой K и показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$; тогда при узлах (3)

$$|\tilde{U}_n^{\{2\}}(f, x) - f(x)| \leqslant K\left(12\sqrt{2} + \frac{5}{2}\pi^2\,|\cos n \arccos x|\right)\frac{\pi^\alpha}{n^\alpha}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{5}$$

Замечание 1. Так как $\tilde{U}_n^{\{2\}}(f, x)$ есть полином $(n-1)$-й степени, то из теоремы 1 вытекает классическая теорема Джексона:

$$E_n(f) C\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f посредством многочлена n-й степени и C — некоторая константа. Таким образом мы получили новое доказательство теоремы Джексона, которое существенно отличается от доказательства самого Джексона, ибо оно получено при помощи интерполяционных полиномов.

Замечание 2. Известно, что в смысле сходимости интерполяционный процесс $\tilde{U}^{\{p\}}(f, x)$ весьма близок к интерполяционному процессу из ([5]) (см. ([3], [6])). Поэтому можно было ожидать, что при $\alpha = 1$ множитель $\frac{1}{n}$ в правой части (5) следует заменить множителем $\frac{\ln n}{n}$ (см. ([8])). Однако следствие показывает, что оценка (5) верна также при $\alpha = 1$.

В заключение выражаю глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. О. Гельфонду за постановку вопроса из п. 2°.

Новгородский государственный
педагогический институт

Поступило
28 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., **1**, 1952, стр. 253. [2] J. Marcinkiewicz, Litt. Sci. Acta Szeged., **8**, 127 (1937). [3] G. Grünwald, Ann. of Math., **37**, 908 (1936). [4] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., **2**, 1954, стр. 130. [5] Д. Л. Берман, ДАН, **69**, № 3 (1948). [6] Д. Л. Берман, ДАН, **64**, № 1 (1949). [7] Д. Л. Берман, ДАН, **70**, № 2 (1950). [8] Д. Л. Берман, ДАН, **85**, № 3 (1952).