Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

П. П. БЕЛИНСКИЙ и И. Н. ПЕСИН

О ЗАМЫКАНИИ КЛАССА НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 22 II 1955)

Мы будем рассматривать общие Q-квазиконформные отображения $w=f(z)$, исследованные в (1). Такие отображения абсолютно непрерывны в смысле Банаха (2), в силу чего почти всюду возникают характеристики $p(z)$, $\Theta(z)$ по М. А. Лаврентьеву (3) *. Функции $p(z)$, $\Theta(z)$ измеримы и $p(z)\leqslant Q$.

Теорема существования. *Каковы бы ни были измеримые характеристики* $p(z)$, $\Theta(z)$, $p(z)\leqslant Q=\text{const}$, *определенные почти для всех* z, $|z|<1$, *существует и притом единственная функция* $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, *осуществляющая общее* Q-*квазиконформное отображение круга* $|z|\leqslant 1$ *на круг* $|w|\leqslant 1$ *и обладающая почти всюду заданными характеристиками.*

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть функция* $w=f(z)$, $f(0)=0$, *производит квазиконформное отображение круга* $|z|\leqslant\rho$, $z=re^{i\varphi}$, $\iint(p(z)-1)\,d\sigma_z<\varepsilon_1\rho^2$ ($d\sigma_z$ — *элемент площади*). *Тогда*

$$\frac{\max\limits_{\varphi}|f(r\rho e^{i\varphi})|}{\min\limits_{\varphi}|f(r\rho e^{i\varphi})|}\leqslant\eta(\varepsilon_1,\,r),$$

где $\eta=\eta(\varepsilon_1,\,r)$ *зависит только от* ε_1, r *и* $\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\eta(\varepsilon_1,\,r)=\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2$.

Доказательство этой леммы следует из того, что отображение $w=f(z)$ можно представить в виде суперпозиции растяжения $\zeta=z/\rho$, квазиконформного отображения единичного круга $|\zeta|<1$ самого на себя и последующего конформного отображения. Искажение окружности $|\zeta|=r$ при конформном отображении не превысит $\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2$, а квазиконформное отображение при малом ε_1 близко к тождественному (4).

Доказательство теоремы существования. Пусть $p_n(z)$, $\Theta_n(z)$ — характеристики, определенные и непрерывные для всех $|z|<1$, $p_n(z)<Q$, и совпадающие с $p(z)$, $\Theta(z)$ на множестве меры большей $\pi-1/n$, и пусть функции $w=f_n(z)$, $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, осуществляют квазиконформные отображения круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$ с заданными характеристиками $p_n(z)$, $\Theta(z)$ (3). В силу компактности мы можем считать их равномерно сходящимися к некоторой предельной функции $w=f(z)$, осуществляющей общее Q-квазиконформное отображение круга $|z|\leqslant 1$ на круг $|w|\leqslant 1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. Покажем, что отображение $w=f(z)$ есть иско-

* $\Theta(z)$ определяется для тех z, где $p(z)\neq 1$.

мое, т. е. обладает почти всюду характеристиками $p(z)$, $\Theta(z)$. Пусть $\alpha > 0$ произвольно и E_α — замкнутое множество такое, что $|E_\alpha| > \pi - \alpha$ и $p(z)$, $\Theta(z)$ определены и непрерывны на E_α. Пусть z_0 — точка плотности множества E_α. Покажем, что отображение $w = f(z)$ обладает в точке z_0 характеристиками $p(z_0)$, $\Theta(z_0)$. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$ и покажем, что достаточно малый эллипс $\mathcal{E}(z_0)$ с центром в точке z_0 и характеристиками $p(z_0)$, $\Theta(z_0)$ переходит в кривую Γ такую, что

$$\frac{\max\limits_{z \in \mathcal{E}(z_0)} |f(z) - f(z_0)|}{\min\limits_{z \in \mathcal{E}(z_0)} |f(z) - f(z_0)|} < 1 + \varepsilon. \tag{1}$$

Для этого подвергнем плоскость z сжатию в $p(z_0)$ раз по направлению $\Theta(z_0)$. Мы будем считать, что все эллипсы характеристик $p(z)$, $\Theta(z)$ тоже подверглись этому же преобразованию. Преобразованные характеристики будем обозначать $p'(z)$, $\Theta'(z)$. Очевидно, $p'(z_0) = 1$. Эллипсы $\mathcal{E}(z_0)$ перейдут в окружность K_r, $|z - z_0| = r$. Пусть $N = N(\varepsilon)$ — фиксированное число, настолько большое, что $\left(\frac{N+1}{N-1}\right)^2 < 1 + \varepsilon$. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(N, \varepsilon)$ настолько мало, что $\eta\left(\varepsilon_1, \frac{1}{N}\right) < 1 + \varepsilon$, и пусть, наконец, $\delta = \delta(\varepsilon)$ настолько мало, что для всех $\rho < \delta(\varepsilon)$ будет

$$\iint\limits_{|z - z_0| < \rho} (p'(z) - 1)\, d\sigma_z < \varepsilon_1 \rho^2.$$

Для достаточно больших $n > n_0(\rho)$ также будет

$$\iint\limits_{|z - z_0| < \rho} (p_n'(z) - 1)\, d\sigma_z < \varepsilon_1 \rho^2,$$

и, в силу леммы, окружность K_r, $r = \rho / N < \delta(\varepsilon) / N(\varepsilon)$, преобразуется функцией $w = f_n(z)$ в кривую Γ, для которой

$$\frac{\max\limits_{z \in K_r} |f_n(z) - f_n(z_0)|}{\min\limits_{z \in K_r} |f_n(z) - f_n(z_0)|} < 1 + \varepsilon$$

для всех n, начиная с некоторого. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получаем (1). Таким образом, предельная функция $w = f(z)$ обладает в точке z_0 характеристиками $p(z_0)$, $\Theta(z_0)$, а значит, в силу произвольности α, почти всюду. Единственность следует из [1] и известных теорем Д. Е. Меньшова [5].

Из доказательства теоремы следует, что класс общих Q-квазиконформных отображений есть не что иное, как замыкание класса квазиконформных отображений с непрерывными характеристиками, или, в конечном счете, класса непрерывно дифференцируемых отображений.

Пфлюгер [6] рассматривал класс отображений, при которых модуль любого криволинейного четырехугольника изменяется не более чем в Q раз. Этот класс совпадает с рассмотренным нами, поскольку равностепенная непрерывность класса Пфлюгера и инвариантность относительно конформных отображений обеспечивают регулярность (см. [1]) отображения.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило
21 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Песин, ДАН, **102**, № 2 (1955). [2] S. Banach, Fund. Math., **7**, 225 (1925). [3] М. А. Лаврентьев, Матем. сборн., **42**, 707 (1935). [4] П. П. Белинский, ДАН, **91**, № 4, 709 (1953). [5] Д. Е. Меньшов, Матем. сборн., **2** (44) : 2, 339 (1937). [6] A. Pfluger, C. R., **234**, 1, 43 (1952).