Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. Е. АЛЕНИЦЫН

ОБ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 III 1955)

В этой заметке формулируются новые результаты об однолистном конформном отображении, которые можно получить, используя работу Нехари (1).

§ 1. Лемма. *Если в плоскости z B_1 и B, $B_1 \subset B$, — две любые конечносвязные области без изолированных граничных точек и с общим граничным компонентом; $z = \zeta$ — любая конечная точка B_1, то для функций $f_1(z, \zeta)$ и $f(z, \zeta)$, однолистно отображающих, соответственно, B_1 и B на единичный круг с концентрическими круговыми разрезами так, что в единичную окружность переходит данный общий граничный компонент этих областей и $f_1(\zeta, \zeta) = f(\zeta, \zeta) = 0$, имеем*

$$|f_1'(\zeta, \zeta)| \geqslant |f'(\zeta, \zeta)|,$$

где знак равенства имеет место только для $f_1(z, \zeta) \equiv \varepsilon f(z, \zeta)$ $|\varepsilon| = 1$.

Теорема 1. *Пусть область K есть круг $|z| = 1$ с конечным числом концентрических круговых разрезов, а функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, регулярна и однолистна в K и отображает эту область на некоторую область D так, что во внешний граничный компонент D * переходит окружность $|z| = 1$. Тогда из n ближайших к $w = 0$ точек внешнего граничного компонента области D, лежащих на n любых лучах, выходящих из $w = 0$ под равными углами, наиболее удаленная от $w = 0$ точка отстоит от $w = 0$ на расстояние*

$$d \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{4}},$$

где знак равенства достигается только функцией

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \varepsilon z^n)^{2/n}}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

При $n = 1$ теорема 1 дает соответствующее обобщение теоремы Кебе об $^1/_4$, а при $n > 1$ — обобщение известного результата Ренгеля.

Пусть система взаимно не налегающих областей данной плоскости обладает следующим свойством: дополняя эти области до односвязных путем уничтожения у каждой области всех ее граничных компонентов, кроме надлежащего одного, получаем систему взаимно не налегающих односвязных областей. Полученную систему односвязных областей будем называть заполнением данной системы областей. Очевидно, система из двух взаимно не налегающих областей всегда имеет заполнение, а система из большего числа областей — не всегда, причем заполнение всегда единственно.

* Если один из граничных компонентов области D содержит бесконечно удаленную точку, то именно он считается ее внешним граничным компонентом.

В дальнейшем B есть конечносвязная область плоскости z без изолированных граничных точек и не содержащая точки $z=\infty$.

Теорема 2. *Если функции* $f_\nu(z)$, $\nu=1, 2$, *однолистно и конформно отображают область* B *на взаимно не налегающие области* D_ν, *то для любых точек* $z_\nu \in B$, $\nu=1, 2$, *являющихся точками регулярности функций* $f_\nu(z)$, *имеем точную оценку*

$$|f_1'(z_1) f_2'(z_2)| \leqslant |f_1(z_1)-f_2(z_2)|^2 |f'(z_1, z_1, L_1) f'(z_2, z_2, L_2)|,$$

где L_ν *есть тот граничный компонент области* B, *который функцией* $f_\nu(z)$ *отображается на граничный компонент области* D_ν, *сохраняющийся при заполнении системы областей* D_ν, *а функция* $f(z, z_\nu, L_\nu)$ *однолистно отображает область* B *на единичный круг с концентрическими круговыми разрезами так, что* L_ν *переходит в единичную окружность и* $f(z_\nu, z_\nu, L_\nu)=0$, $\nu=1, 2$. *Знак равенства в этой оценке достигается только для функций, определяемых уравнениями*

$$\frac{f_1(z)-a_1}{f_1(z)-a_2}=\rho f(z, z_1, L_1), \quad \frac{f_2(z)-a_2}{f_2(z)-a_1}=\frac{1}{\rho} f(z, z_2, L_2),$$

где ρ — *любое положительное число*; a_1 *и* a_2 — *любые конечные и различные числа*; L_1 *и* L_2 — *любые, не обязательно различные, граничные компоненты области* B.

Пусть заданы любые конечные и различные между собой числа a_ν и любые, не обязательно различные между собой, граничные компоненты L_ν области B, $\nu=1, \ldots, n$. Если область B содержит точку $z=0$, функции $f_\nu(z)$, $f_\nu(0)=a_\nu$, $\nu=1, \ldots, n$, однолистно отображают область B на взаимно не налегающие области D_ν, система которых имеет заполнение, и функция $f_\nu(z)$ отображает L_ν в граничный компонент области D_ν, сохраняющийся при заполнении системы областей D_ν, то будем говорить, что эти функции образуют систему типа $F(B, a_1, \ldots, a_n, L_1, \ldots, L_n)$.

Следствие. *Для функционала* $J=|f_1'(0) f_1'(0)|$ *относительно всевозможных функций* $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$, *образующих системы типа* $F(B, a_1, a_2, L_1, L_2)$, *имеем точную оценку*

$$J \leqslant |a_1-a_2|^2 |f'(0, 0, L_1) f'(0, 0, L_2)|,$$

где $f(z, 0, L_\nu)$, $\nu=1, 2$, *есть функция теоремы* 2. *Знак равенства достигается только функциями, определяемыми уравнениями*

$$\frac{f_1(z)-a_1}{f_1(z)-a_2}=\rho f(z, 0, L_1), \quad \frac{f_2(z)-a_2}{f_2(z)-a_1}=\frac{1}{\rho} f(z, 0, L_2),$$

где ρ — *любое положительное число.*

Эти результаты обобщают известную теорему М. А. Лаврентьева ([2]).

Можно указать некоторые аналогичные точные оценки и в случае $n>2$.

Теорема 3. *Если функции* $f_\nu(z)$, $\nu=1, \ldots, 2m$, $m \geqslant 1$, *однолистно и конформно отображают область* B *на взаимно не налегающие области, система которых имеет заполнение, то для любых точек* $z_\nu \in B$, *являющихся точками регулярности функций* $f_\nu(z)$, *имеем точную оценку*

$$\prod_{\nu=1}^{2m} |f_\nu'(z_\nu)| \leqslant \prod_{1 \leqslant k < \nu \leqslant 2m} |f_k(z_k)-f_\nu(z_\nu)|^{2(-1)^{k+\nu-1}} \cdot \prod_{\nu=1}^{2m} |f'(z_\nu, z_\nu, L_\nu)|,$$

где $f(z, z_\nu, L_\nu)$ *есть функция теоремы* 2, $\nu=1, \ldots, 2m$.

Следствие. *Если точки* a_ν, $\nu=1, \ldots, 2m$, $m \geqslant 1$, *являются вершинами правильного многоугольника, причем* a *есть расстояние от них до центра этого многоугольника, то для функционала*

$J=\prod_{\nu=1}^{2m}|f_\nu'(0)|$ *относительно всевозможных функций* $f_\nu(z)$, $\nu=1,\dots,2m$, *образующих системы типа* $F(B, a_1, \dots, a_{2m}, L_1, \dots, L_{2m})$, *имеем точную оценку*:

$$J\leqslant\left(\frac{2}{m}\right)^{2m}a^2\prod_{\nu=1}^{2m}|f'(0,0,L_\nu)|,$$

где $f(z,0,L_\nu)$, $\nu=1,\dots,2m$, *есть функция теоремы* 2.

Эти оценки при $m\geqslant 2$ продвигают несколько дальше соответствующие результаты Г. М. Голузина ([3]).

§ 2. Здесь рассматриваются ограниченные однолистные функции.

Теорема 4. *Если функция* $w=f(z)$ *однолистно отображает область* B *на область* D, *лежащую вместе с ее границей в круге* $|w|<1$, *то для любой точки* $z_1\in B$ *имеем точную оценку*

$$|f'(z_1)|\leqslant\frac{1}{M}(1-|f(z_1)|^2)|f'(z_1,z_1,L)|,$$

где M *есть модуль двусвязной области*, ограниченной единичной окружностью и внешним граничным компонентом области* D; L — *тот граничный компонент области* B, *который при отображении* $w=f(z)$ *соответствует внешнему граничному компоненту области* D, *а* $f(z,z_1,L)$ *есть функция теоремы* 2.

Знак равенства достигается только для функций

$$f(z)=\frac{f(z,z_1,L)+\alpha M}{M+\bar{\alpha}f(z,z_1,L)},$$

где $|\alpha|<1$, $M>1$, L — *любой граничный компонент области* B.

Теорема 5. *Если функции* $f_\nu(z)$, $\nu=1,2$, *однолистно отображают область* B *на взаимно не налегающие области, система которых имеет заполнение, принадлежащее единичному кругу, то для любых точек* $z_\nu\in B$, $\nu=1,2$, *и любых* $\alpha>0$, $\beta>0$ *имеем точную оценку*

$$\left(\frac{|f_1'(z_1)|}{1-|f_1(z_1)|^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{|f_2'(z_2)|}{1-|f_2(z_2)|^2}\right)^{\beta}\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{f_1(z_1)-f_2(z_2)}{1-\overline{f_1(z_1)}f_2(z_2)}\right|^{2\sqrt{\alpha\beta}}|f'(z_1,z_1,L_1)|^{\alpha}|f'(z_2,z_2,L_2)|^{\beta},$$

где $f(z,z_\nu,L_\nu)$, $\nu=1,2$, *есть функция теоремы* 2.

Если B есть единичный круг и $\alpha=\beta=1$, получаем теорему Нехари ([1]).

Приведем теорему об ограниченных однолистных функциях в единичном круге. Рассмотрим производную Шварца

$$\{f,z\}=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

Теорема 6. *Если функция* $f(z)$ *однолистна в круге* $|z|<1$ *и в нем* $|f(z)|<1$, *то в этом круге имеем точную оценку*

$$\frac{1}{6}|\{f,z\}|+\frac{|f'(z)|^2}{(1-|f(z)|^2)^2}\leqslant\frac{1}{(1-|z|^2)^2}.$$

Ленинградский институт
точной механики и оптики

Поступило
23 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Z. Nehari, Trans. Am. Math. Soc., 75, № 2 (1953). [2] М. А. Лаврентьев, Тр. Физ.-матем. инст. им. В. А. Стеклова, 5, 159 (1934). [3] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 29, № 2 (1951).

* Т. е. отношение большего радиуса к меньшему того кольца, на которое эта область может быть отображена взаимно-однозначно и конформно.