Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. С. АРЖАНЫХ

О СВЯЗИ БИ-ВОЛНОВОГО ПОЛЯ С ДИНАМИКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VII 1955)

§ 1. Би-волновое поле частиц без массы покоя определяется уравнением

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = f(q,\ t), \tag{1}$$

а при наличии массы покоя уравнением [1]

$$\prod_{i=1}^{2}\left(\nabla^2 - k_i^2 - \frac{1}{c_i^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = f, \tag{2}$$

$k_i = \dfrac{2\pi m_i c_i}{h}$ (h — постоянная Планка). Так, например, в теории би-поля Боппа и Подольского [2] $m_1 = 0$, m_2 — масса электрона, $c_1 = c_2$ — скорость света.

В настоящем сообщении будет показано, что существует тесная связь между задачей интегрирования уравнения (1) или преобразованного по Лапласу уравнения (2) с интегрированием динамического уравнения теории упругости

$$\alpha\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \beta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{F}(q,\ t) \tag{3}$$

или его преобразования по Лапласу

$$\alpha\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \beta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} - \eta^2\mathbf{v} = \mathbf{G}(q,\ \eta). \tag{4}$$

На основе этой связи будут построены потенциалы двойного запаздывания и изучены их свойства для оператора ab, где

$$a = \nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad b = \nabla^2 - \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть в области Q определен вектор $\mathbf{f}(q,\ t)$ такой, что его проекция на некоторое постоянное направление совпадает с f. Построим затем вектор*

$$\mathbf{F}(x,\ t) = -\frac{\beta}{4\pi}\left(\int\frac{\mathbf{f}(q,\ t - r/\sqrt{\alpha})}{r(x,\ q)}\,dQ - \alpha\,\mathrm{grad}\int\frac{1}{r}\left(\mathbf{r}\Sigma_t^{xq}(\mathbf{f})\right)dQ\right) =$$

$$= -\frac{\alpha}{4\pi}\left(\int\frac{\mathbf{f}(q,\ t - r/\sqrt{\beta})}{r(x,\ q)}\,dQ - \beta\,\mathrm{rot}\int\frac{1}{r}\left[\mathbf{r}\Sigma_t^{xq}(\mathbf{f})\right]dQ\right), \tag{6}$$

где

$$\Sigma_t^{xq}(\mathbf{f}) \equiv \frac{1}{r^2}\int_{t - r/\sqrt{\beta}}^{t - r/\sqrt{\alpha}}(t - t')\,\mathbf{f}(q,\ t')\,dt', \tag{7}$$

и рассмотрим уравнение (3). *Если* $\mathbf{u}(q,\ t)$ *— его решение из класса* C^4 *в области* Q, *то проекция вектора* $\mathbf{u}$ *на то же направление удовлетворяет уравнению* (1).

Доказательство. Из уравнения (3) находим

$$(\alpha-\beta)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\beta\, b(\mathbf{u})=\mathbf{F},\quad (\alpha-\beta)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}+\alpha\, a(\mathbf{u})=\mathbf{F},$$

$$\alpha a(\operatorname{div}\mathbf{u})=\operatorname{div}\mathbf{F},\quad \beta b(\operatorname{rot}\mathbf{u})=\operatorname{rot}\mathbf{F}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}+\beta\, ab(\mathbf{u})=a(\mathbf{F}),\quad \frac{\alpha-\beta}{\beta}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}+\alpha\, ab(\mathbf{u})=b(\mathbf{F})$$

или

$$\alpha\beta\, ab(\mathbf{u})=\beta\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}-\alpha\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}-\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2}. \tag{8}$$

На основании формул (32) и (33) работы [3] замечаем, что вектор

$$\vec{\tau}(q,\ t)=-\frac{\alpha\beta}{4\pi}\mathbf{f}(q,\ t) \tag{9}$$

есть плотность запаздывающего потенциала объемных сил $\mathbf{F}(x,\ t)$, соответствующего оператору правой части уравнения (8). Но тогда, в силу (34) той же работы, имеем:

$$ab(\mathbf{u})=\mathbf{f}. \tag{10}$$

Проектируя это равенство на любое постоянное направление, получим равенство вида $ab(\varphi)=f$.

Точно так же устанавливаем связь уравнения

$$\prod_{i=1}^{2}\left(\nabla^2-k_i^2-\frac{\eta^2}{c_i^2}\right)\psi=g(q,\ \eta) \tag{11}$$

(операционное преобразование би-волнового уравнения (2)) с уравнением теории упругости (4). Построим вектор $\mathbf{g}(q,\ \eta)$ такой, чтобы его проекция на некоторое постоянное направление совпадала с g. Затем вычислим потенциал объемных сил $\mathbf{G}$ с плотностью

$$\vec{\rho}(q,\ \eta)=-\frac{\alpha\beta}{4\pi}\mathbf{g} \tag{12}$$

для оператора $\beta\operatorname{grad}\operatorname{div}-\alpha\operatorname{rot}\operatorname{rot}-\eta^2$,

$$\alpha=c_1^2\Big/\left[1+\left(\frac{k_1c_1}{\eta}\right)^2\right],\quad \beta=c_2^2\Big/\left[1+\left(\frac{k_2c_2}{\eta}\right)^2\right]. \tag{13}$$

Тогда проекция решения $\mathbf{v}(q,\ \eta)$ уравнения (4) на указанное направление есть решение уравнения (11). Действительно, из уравнения (4) следует:

$$(\alpha\nabla^2-\eta^2)\operatorname{div}\mathbf{v}=\operatorname{div}\mathbf{G},\quad (\beta\nabla^2-\eta^2)\operatorname{rot}\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{G}.$$

Заменяя в равенстве

$$\beta\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{G}-\alpha\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G}-\eta^2\mathbf{G}=\alpha\beta\mathbf{g} \tag{14}$$

векторы $\mathbf{G}$, $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ и скаляр $\operatorname{div}\mathbf{G}$, имеем:

$$\alpha\beta\nabla^2(\operatorname{grad}\operatorname{div}-\operatorname{rot}\operatorname{rot})\mathbf{v}-\eta^2(\beta\operatorname{grad}\operatorname{div}-\alpha\operatorname{rot}\operatorname{rot})\mathbf{v}-$$
$$-\eta^2(\alpha\operatorname{grad}\operatorname{div}-\beta\operatorname{rot}\operatorname{rot}-\eta^2)\mathbf{v}=\alpha\beta\mathbf{g},$$

или, в силу тождества $\operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \nabla^2$,

$$\alpha\beta\nabla^4\mathbf{v} - \gamma_1^2(\alpha+\beta)\nabla^2\mathbf{v} + \gamma_1^4\mathbf{v} = \alpha\beta\mathbf{g},$$

что можно представить в виде

$$\left(\nabla^2 - \frac{\gamma_1^2}{\alpha}\right)\left(\nabla^2 - \frac{\gamma_1^2}{\beta}\right)\mathbf{v} = \mathbf{g}. \tag{15}$$

Проектируя на выбранное направление, получим равенство (11).

§ 2. Би-волновому оператору (1) соответствуют три типа потенциалов: объемных зарядов, простого и двойного слоя. В силу доказанной теоремы потенциал объемных зарядов связан с потенциалом объемных сил теории упругости, а потенциалы простого и двойного слоя, соответственно, с потенциалом поверхностных сил

$$\mathbf{v}(x,\ t) = \frac{1}{\beta}\oint\frac{\vec{\sigma}(s,\ t-r/\sqrt{\beta})}{r\ (x,\ s)}\,dS + \operatorname{grad}\oint\frac{1}{r}\,(\mathbf{r}\Sigma_t^{xs}\,(\vec{\sigma}))\,dS =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\oint\frac{\vec{\sigma}(s,\ t-r/\sqrt{\alpha})}{r\ (x,\ s)}\,dS + \operatorname{rot}\oint\frac{1}{r}\,[\mathbf{r}\Sigma_t^{xs}\,(\vec{\sigma})]\,dS \equiv \oint L_t^{xs}(\vec{\sigma})\,dS =$$

$$= \oint\left\{A\,[\vec{\sigma}]_\alpha - B\,[\vec{\sigma}]_\beta + C\Sigma_t^{xs}\,(\vec{\sigma})\right\}dS \tag{16}$$

и потенциалом поверхностных деформаций

$$\mathbf{w}(x,\ t) \equiv \oint K_t^{xs}\,(\vec{\mu})\,dS = \oint\left\{\left(E + \frac{r}{V\alpha}F\frac{\partial}{\partial t}\right)[\vec{\mu}]_\alpha -\right.$$

$$\left. -\left(G + \frac{r}{V\beta}H\frac{\partial}{\partial t}\right)[\vec{\mu}]_\beta + D\Sigma_t^{xs}\,(\vec{\mu})\right\}dS, \tag{17}$$

$$\left([\vec{\sigma}]_\alpha \equiv \vec{\sigma}\left(s,\ t-\frac{r}{V\alpha}\right),\ \ldots,\ [\vec{\mu}]_\beta \equiv \vec{\mu}\left(s,\ t-\frac{r}{V\beta}\right)\right),$$

где тензоры $A,\ \ldots,\ H$ имеют структуру, указанную в ([3], [4]).

Определение 1. Потенциалом двойного запаздывания простых зарядов, распределенных с плотностью $\sigma(s,\ t)$ на поверхности S, назовем тензор $V(x,\ t)$, имеющий составляющие

$$V_{lk} = \frac{1}{\alpha}\oint\frac{[\sigma]_\alpha}{r}\frac{r_l r_k}{r^2}\,dS - \frac{1}{\beta}\oint\frac{[\sigma]_\beta}{r}\left(\frac{r_l r_k}{r^2} - \delta_{lk}\right)dS +$$

$$+ \oint\frac{1}{r}\,\Sigma_t^{xs}\,(\sigma)\left(\frac{3r_l r_k}{r^2} - \delta_{lk}\right)dS, \tag{18}$$

где $\delta_{lk} = 0$, если $l \neq k$, $\delta_{ll} = 1$, а r_l — проекция на направление координатной оси x_l радиуса-вектора, проведенного из ауфпункта в точку несущей поверхности.

Определение 2. Потенциалом двойного запаздывания дипольных зарядов, распределенных с плотностью $\mu(s,\ t)$ на S, назовем тензор W, имеющий составляющие

$$W_{lk} = \frac{1}{\alpha}\oint\frac{1}{r^2}\left\{[\mu]_\alpha\left(\frac{\partial r}{\partial n}\left(\gamma\delta_{lk} - 6\gamma\,\frac{r_l r_k}{r^2}\right) + (2\gamma-\alpha)\,\frac{r_l n_k}{r} + \gamma\,\frac{r_k n_l}{r}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{r}{V\alpha}\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}\right]_\alpha\left(-\gamma\,\frac{\partial r}{\partial n}\frac{r_l r_k}{r^2} + (\gamma-\alpha)\,\frac{r_l n_k}{r}\right)\right\}dS -$$

$$- \frac{1}{\beta}\oint\frac{r}{r^2}\left\{[\mu]_\beta\left(\frac{\partial r}{\partial n}\left((\gamma+\beta)\,\delta_{lk} - 6\gamma\,\frac{r_l r_k}{r^2}\right) + \gamma\,\frac{r_l n_k}{r} + (2\gamma-\alpha)\,\frac{r_k n_l}{r}\right) +\right.$$

$$+\frac{r}{\sqrt{\beta}}\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}\right]_{\beta}\left(\frac{\partial r}{\partial n}\left(\beta\delta_{lk}-\gamma\frac{r_l r_k}{r^2}\right)+(\gamma-\beta)\frac{r_k n_l}{r}\right)\Big\}dS+$$

$$+3\gamma\oint\frac{\Sigma_t^{xs}(\mu)}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial n}\left(\delta_{lk}-5\frac{r_l r_k}{r^2}\right)+\frac{r_l n_k+r_k p_l}{r}\right)dS, \qquad (19)$$

где n_l — проекция внешней нормали к несущей поверхности.

В дальнейшем будем предполагать поверхность S простой, замкнутой, гладкой в смысле Ляпунова. Плотности σ и μ будем выбирать из класса тех функций, которыми определяются ньютоновские запаздывающие потенциалы простого и двойного слоев, допускающие прямые значения первых производных в точках несущей поверхности.

Основные свойства введенных потенциалов двойного запаздывания следующие:

1) функции V_{lk} и W_{lk} в точках, не лежащих на S, удовлетворяют уравнению $ab(\varphi)=0$;

2) функции V_{lk} имеют порядок $1/r$, а W_{lk} порядок $1/r^2$ при $r\to\infty$;

3) функции V_{lk} непрерывны во всем пространстве;

4) функции W_{lk} претерпевают разрывы первого рода на S, причем имеют место формулы

$$\lim_{x\to s} W_{lk}=-2\pi\varepsilon\delta_{lk}\mu(s,\ t)+(W_{lk})_S, \qquad (20)$$

где $\varepsilon=+1$ для внутреннего предела, $\varepsilon=-1$ для внешнего предела, а скобкой обозначено прямое значение на поверхности;

5) первые производные функций V_{lk} претерпевают разрывы на S, причем имеют место формулы

$$\lim_{x\to s}\frac{\partial V_{lk}}{\partial x_i}=\frac{2\pi\varepsilon}{\beta}\left(\delta_{lk}-\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)n_l n_k\right)n_i\sigma(s,\ t)+\left(\frac{\partial V_{lk}}{\partial x_i}\right)_S. \qquad (21)$$

Если выполнить преобразование Лапласа над потенциалами двойного запаздывания, а затем заменить α и β на те значения, которые соответствуют массам покоя, то получим (в силу теоремы запаздывания) потенциалы для оператора (11).

Институт математики и механики
им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР

Поступило
25 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, М., 1952. [2] Д. Иваненко, А. Соколов, Классическая теория поля, М., 1949, [3] И. С. Аржаных, Тр. Инст. матем. и мех. им. В. И. Романовского АН УзССР. в. 13 (1954). [4] И. С. Аржаных, ДАН, 93, № 3 (1954).