Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

В. П. КОРОБЕЙНИКОВ

ОБ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ АДИАБАТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 12 VII 1955)

В работах М. Л. Лидова ([1,2]) на основании методов теории размерности, развитых Л. И. Седовым ([3]), дается способ нахождения интегралов уравнений для автомодельных одномерных неустановившихся движений совершенного газа при условии сохранения энтропии в частице, а также для неавтомодельных линеаризированных задач как в одномерном случае, так и в некоторых случаях неодномерных движений. Ниже дается обобщение интеграла М. Л. Лидова на случай неавтомодельного движения газа с любым уравнением состояния в предположении, что безразмерные характеристики движения разлагаются в ряды по некоторой переменной, зависящей от времени.

1. Рассмотрим адиабатические неустановившиеся одномерные движения невязкого и нетеплопроводного газа, когда основными искомыми функциями являются скорость u, плотность ρ и давление p, а определяющими параметрами одномерного движения — линейная координата r, время t, константы с независимыми размерностями a, b, c и константы, являющиеся безразмерными или с зависимыми от a, b, c размерностями.

Пусть $[a] = ML^kT^s$, $[b] = L^mT^n$, $[c] = L^\omega T^\delta$, где k, s, m, n, ω, δ — некоторые числа. Для скорости, плотности и давления можно написать формулы

$$u = b^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{n}{m}-1} V, \quad \rho = ab^{-\frac{k+3}{m}} t^{\frac{n}{m}(k+3)-s} R, \quad p = ab^{-\frac{k+1}{m}} t^{\frac{n}{m}(k+1)-(s+2)} P, \qquad (1)$$

где V, R, P — отвлеченные величины и, следовательно, могут зависеть лишь от безразмерных комбинаций r, t и других параметров. Если $c = 0$ или ∞ и движение является автомодельным ([3]), то V, R, P зависят от одной безразмерной переменной. В рассматриваемом нами случае V, R, P, вообще говоря, являются функциями двух безразмерных переменных, за которые мы примем

$$\lambda = b^{-\frac{1}{m}} r t^{\frac{n}{m}}, \quad \tau = \varepsilon t^l, \quad \text{где } \varepsilon = cb^{-\frac{\omega}{m}}, \quad l = -\delta + \frac{n\omega}{m}. \qquad (2)$$

Предположим дальше, что функции V, R, P разлагаются в степенные ряды по переменной τ в окрестности $\tau = 0$, т. е.

$$V = \sum V_i \tau^i, \quad R = \sum R_i \tau^i, \quad P = \sum P_i \tau^i,$$

причем

$$\frac{1}{i!} \frac{\partial^i V}{\partial \tau^i}\bigg|_{\tau=0} = V_i(\lambda), \quad \frac{1}{i!} \frac{\partial^i R}{\partial \tau^i}\bigg|_{\tau=0} = R_i(\lambda), \quad \frac{1}{i!} \frac{\partial^i P}{\partial \tau^i}\bigg|_{\tau=0} = P_i(\lambda). \qquad (3)$$

2. Введем в рассмотрение систему интегралов:

$$I_i = \int_{\Omega} \Phi_i(S)\,\rho\,d\Omega, \quad i = 0, 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

здесь Ω — объем между двумя сферами, цилиндрами или плоскостями, соответственно случаю сферической, цилиндрической и плоской симметрии, расстояние до которых определяется формулами

$$r' = b^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{n}{m}} \lambda', \qquad r'' = b^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{n}{m}} \lambda'';$$

S — энтропия; Φ_i — некоторые функции от энтропии, выбор которых зависит от термодинамических свойств газа и от условий задачи.

Пусть размерности I_i и Φ_i даются формулами

$$[I_i] = [a]^{x_i} [b]^{y_i} [t]^{\mu_i}, \qquad [\Phi_i] = [a]^{\eta_i} [b]^{\zeta_i} [t]^{\xi_i}.$$

Показатели x_i, y_i, μ_i определятся путем сравнения размерностей правой и левой частей уравнения (4). Подобно формулам (1) для I_i и Φ_i можем написать:

$$I_i = a^{x_i} b^{y_i} t^{\mu_i} K_i(\lambda', \lambda'', \tau), \qquad \Phi_i = a^{\eta_i} b^{\zeta_i} t^{\xi_i} G_i(\lambda, \tau). \tag{5}$$

Беря полную производную от I_i по t, получаем на основании (4) и (5)

$$a^{x_i} b^{y_i} t^{\mu_i - 1} \left[\mu_i K_i(\lambda', \lambda'', \tau) + l\tau \frac{\partial K_i(\lambda', \lambda'', \tau)}{\partial \tau}\right] =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\Omega^*} \Phi_i \rho\, d\Omega + \int_{\sigma''} \Phi_i \rho \left(\frac{dr}{dt} - u\right) d\sigma - \int_{\sigma'} \Phi_i \rho \left(\frac{dr}{dt} - u\right) d\sigma;$$

здесь Ω^* — жидкий объем, совпадающий с Ω в рассматриваемый момент времени; σ' и σ'' — сферы, ограничивающие объем Ω. Ввиду адиабатичности движения верно равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^*} \Phi_i(S)\,\rho\,d\Omega = 0$$

и, следовательно,

$$a^{x_i} b^{y_i} t^{\mu_i - 1} \left[\mu_i K_i + l\tau \frac{\partial K_i}{\partial \tau}\right] =$$

$$= \int_{\sigma''} \Phi_i \rho \left(\frac{dr}{dt} - u\right) d\sigma - \int_{\sigma'} \Phi_i \rho \left(\frac{dr}{dt} - u\right) d\sigma. \tag{6}$$

Так как величина μ_i определяется размерностью $\Phi_i(S)$, то предположим, что можно выбрать $\Phi_i(S)$ таким образом, чтобы

$$\mu_i = -il, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Если соотношение (6) привести к безразмерному виду согласно формулам (1), (2), (5) и затем продифференцировать i раз по τ правую и левую части полученного уравнения, считая это возможным, то получим равенства:

$$\mu_i \frac{\partial^i K_i}{\partial \tau^i} + il \frac{\partial^i K_i}{\partial \tau^i} + l\tau \frac{\partial^{i+1} K_i}{\partial \tau^{i+1}} =$$

$$= \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} \left[G_i' R'\left(-\frac{n}{m}\lambda' - V'\right)\lambda'^{(\nu-1)} - G_i'' R''\left(-\frac{n}{m}\lambda'' - V''\right)\lambda''^{(\nu-1)}\right] A, \tag{8}$$

где A — некоторая постоянная, появляющаяся в результате интегрирования по сферам σ' и σ''; $\nu = 3$ для сферической, $\nu = 2$ для цилиндрической и $\nu = 1$ для плоской симметрии.

На основании условия (7) и считая $\tau = 0$, из (8) получаем основные формулы, дающие связь между V_i, R_i, P_i:

$$\frac{\partial^i}{\partial \tau^i}\left[G_i' R'\left(-\frac{n}{m}\lambda' - V'\right)\lambda'^{(\nu-1)} - G_i'' R''\left(-\frac{n}{m}\lambda'' - V''\right)\lambda''^{(\nu-1)}\right]_{\tau=0} = 0. \quad (9)$$

Полагая $i = 0$, получаем интеграл адиабатичности для автомодельных движений:

$$G_0(\lambda) R_0(\lambda)\left[\frac{n}{m}\lambda + V_0\right]\lambda^{(\nu-1)} = \text{const}. \quad (10)$$

Следует отметить, что предложенный выше способ получения уравнений (9) верен как для движений газа без учета массовых сил, так и для движений газа с учетом массовых центральных сил (например, сил ньютоновского тяготения).

3. В случае совершенного газа примем

$$\Phi_i = \left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)^{z_i} = \exp\left(\frac{S}{c_v} z_i\right), \quad (11)$$

где z_i — некоторые числа; γ — показатель адиабаты; c_v — теплоемкость при постоянном объеме. Используя формулы (1), для величин η_i, ζ_i, ξ_i, G_i в (5) имеем формулы

$$\eta_i = z_i(1-\gamma), \quad \zeta_i = \frac{z_i}{m}[\gamma(k+3) - k - 1],$$

$$\xi_i = \frac{z_i n}{m}[k + 1 - \gamma(k+3)] + z_i(s\gamma - s - 2), \quad G_i = \left(\frac{P}{R^\gamma}\right)^{z_i}.$$

Сравнивая размерности в формуле (4) и учитывая (7), для выбора z_i имеем системы алгебраических уравнений

$$(1-\gamma) z_i + 1 = x_i, \quad (3\gamma - 1) z_i = k x_i + m y_i,$$

$$-2 z_i = s x_i + n y_i - il, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \quad (12)$$

Формула (10) принимает вид

$$\left(\frac{P_0}{R_0^\gamma}\right)^{z_0} R_0\left(\frac{n}{m}\lambda + V_0\right)\lambda^{(\nu-1)} = \text{const}. \quad (13)$$

Интеграл (13) был получен ранее М. Л. Лидовым (1) и другим методом в частном случае для задачи о сильном взрыве А. Сакураи (4). Для коэффициентов разложений (3) с номерами $i > 0$ получаем уравнения

$$\frac{\partial^i}{\partial \tau^i}\left[\left(\frac{P}{R^\gamma}\right)^{z_i} R\left(\frac{n}{m}\lambda + V\right)\lambda^{\nu-1}\right]_{\tau=0} = B_i, \quad (14)$$

где B_i — произвольные постоянные.

При $i = 1$ из (14) получаем интеграл М. Л. Лидова (2) для одномерной линеаризированной задачи.

4. Пусть характеристики движения, в отличие от формул (1), заданы соотношениями:

$$u = F(t)\tilde{V}(\lambda, q), \quad \rho = H(t)\tilde{R}(\lambda, q), \quad p = D(t)\tilde{P}(\lambda, q), \quad (15)$$

где $F(t)$ имеет размерность скорости, $H(t)$ — плотности, $D(t)$ — давления, $q(t)$ — некоторая безразмерная функция от времени. Из сравнения (1) и (15) получаем

$$V(\lambda, \tau) = F(t)\, b^{-\frac{1}{m}} t^{\frac{n}{m}+1} \tilde{V}(\lambda, q), \quad R(\lambda,\tau) = \frac{H(t)}{a} b^{\frac{k+3}{m}} t^{-\frac{n}{m}(k+3)+s} \tilde{R}(\lambda, q),$$

$$P(\lambda, \tau) = \frac{D(t)}{a} b^{\frac{k+1}{m}} t^{-\frac{n}{m}(k+1)+s+2} \tilde{P}(\lambda, q). \tag{16}$$

Если ввести безразмерные функции $F(t)\, b^{-\frac{1}{m}} t^{\frac{n}{m}+1} = f(\tau)$, $\frac{H(t)}{a} b^{\frac{k+3}{m}} t^{-\frac{n}{m}(k+3)+s} = h(\tau)$, $\frac{D(t)}{a} b^{\frac{k+1}{m}} t^{-\frac{n}{m}(k+1)+s+2} = \alpha(\tau)$, то имеем из (16)

$$V(\lambda, \tau) = f(\tau)\, \tilde{V}(\lambda, q), \quad R(\lambda, \tau) = h(\tau)\, \tilde{R}(\lambda, q),$$

$$P(\lambda, \tau) = \alpha(\tau)\, \tilde{P}(\lambda, q). \tag{17}$$

Если предположить, что $f(\tau)$, $h(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $q(\tau)$ — аналитические функции от τ в окрестности $\tau = 0$, а $\tilde{V}, \tilde{R}, \tilde{P}$ — аналитические функции от q вблизи $q = 0$ разлагаются в степенные ряды по q вида

$$\tilde{V} = \sum \tilde{V}_i q^i, \quad \tilde{R} = \sum \tilde{R}_i q^i, \quad \tilde{P} = \sum \tilde{P}_i q^i,$$

то из (17) для V_i, R_i P_i получаем

$$V_i = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} [f(\tau)\, \tilde{V}(\lambda, q)]_{\tau=0}, \quad R_i = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} [h(\tau)\, \tilde{R}(\lambda, q)]_{\tau=0},$$

$$P_i = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} [\alpha(\tau)\, \tilde{P}(\lambda, q)]_{\tau=0}. \tag{18}$$

Если считать, что $q(\tau)|_{\tau=0} = 0$, то из (18) следует

$$V_i = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} [f(\tau)\, \tilde{V}(\lambda, q)]_{q=\tau=0}, \quad R_i = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} [h(\tau)\, \tilde{R}(\lambda, q)]_{q=\tau=0},$$

$$P_i = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} [\alpha(\tau)\, \tilde{P}(\lambda, q)]_{q=\tau=0}. \tag{19}$$

Формулы (19) дают связь между V_i и $\tilde{V}_i$, R_i и $\tilde{R}_i$, P_i и $\tilde{P}_i$. Так, при $i = 1$ имеем:

$$V_1 = \frac{df}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \tilde{V}_0(\lambda) + f(0)\, \tilde{V}_1(\lambda) \frac{dq}{d\tau}\Big|_{\tau=0};$$

$$R_1 = \frac{dh}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \tilde{R}_0(\lambda) + h(0)\, \tilde{R}_1(\lambda) \frac{dq}{d\tau}\Big|_{\tau=0};$$

$$P_1 = \frac{d\alpha}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \tilde{P}_0(\lambda) + \alpha(0)\, \tilde{P}_1(\lambda) \frac{dq}{d\tau}\Big|_{\tau=0}.$$

Пользуясь формулами (19), из (9) можно получить интегралы уравнений для функций $\tilde{V}_i$, $\tilde{R}_i$, $\tilde{P}_i$.

5. Подобно тому как это сделано в работе [2] для линейного приближения, вышеизложенный метод отыскания интегралов уравнений для функций V_i, R_i, P_i можно обобщить на некоторые случаи неодномерных движений газа.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
2 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Л. Лидов, ДАН, 103, № 1 (1955). [2] М. Л. Лидов, ДАН, 102, № 6 (1955). [3] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, М., 1954. [4] Akira Sakurai, J. Phys. Soc. Japan, 8, 662 (1953).