Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. СКАЛКИНА

О СОХРАНЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К СООТВЕТСТВУЮЩИМ РАЗНОСТНЫМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VII 1955)

В теории прерывистого автоматического регулирования часто встречаются системы разностных уравнений, близкие к системам дифференциальным. Для линейных систем с постоянными коэффициентами (как было замечено еще Н. Е. Жуковским (1) и подтверждено в последующих работах по теории автоматического регулирования (2)) об устойчивости решений разностных уравнений при определенных ограничениях можно судить по устойчивости решений соответствующих дифференциальных уравнений.

В этой заметке ставится задача изучения условий, при соблюдении которых переход от систем дифференциальных уравнений к системам разностных не нарушает асимптотической устойчивости.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

и соответствующую систему конечноразностных уравнений

$$x^h_{s,m+1} = x^h_{sm} + hX_s(t_m, x^h_{1m}, \ldots, x^h_{nm}) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где $h > 0$ — шаг разностного уравнения; $m \geqslant 0$ — целое число; $x^h_{sm} = x^h_s(t_0 + mh) = x^h_s(t_m)$; $X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ определены в области

$$|x_s| \leqslant H; \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty \tag{H}$$

и удовлетворяют в ней следующим условиям: $X_s(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$; $\partial X_s/\partial x_j$ ограничены; $\partial X_s/\partial t$ удовлетворяют условиям Липшица по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Из этих условий, очевидно, следует, что имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial X_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} X_j \right| \leqslant Nx, \tag{3}$$

до тех пор, пока $|x_s(t)| \leqslant x \leqslant H$; N — некоторое положительное число.

Теорема 1. *Если любое решение системы* (1) *с начальными значениями из области*

$$|x_s(t_0)| \leqslant x \leqslant H, \quad 0 \leqslant t_0 < \infty, \tag{H_0}$$

удовлетворяет неравенству

$$|x_s(t, t_0)| < Bxe^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{4}$$

где B и α — положительные числа, не зависящие от t_0, $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, то тривиальное решение системы (2) *при достаточно малом h будет асимптотически равномерно относительно t_0, $x_{10}^h, \ldots, x_{n0}^h$ устойчиво.*

Доказательство. По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leqslant H$) находим $\delta(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2B} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (так как, не нарушая общности, можно считать, что $B \geqslant 1$). Из произвольной точки δ-окрестности начала координат выпускаем одновременно две траектории: $x_s(t)$ и x_{sm}^h (т. е. $x_s(t_0) = x_s^h(t_0) = x_{s0}$). Согласно выбору δ и неравенствам (4)

$$|x_s(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } t \geqslant t_0, \tag{5}$$

и, если за T выбрано число

$$T \geqslant \frac{1}{\alpha} \ln 4B, \tag{6}$$

то

$$|x_s(\tau)| < {}^1/_4\delta, \quad \text{где } \tau \geqslant t_0 + T. \tag{7}$$

Очевидно, что найденные таким образом δ и T не зависят от t_0, $x_{10}, \ldots, x_{n0}$.

Из (4) видно, что в течение времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ $x_s(t)$ не выйдет из области $|x_s(t)| < \delta B$, и неравенства (3) будут иметь место при $x = \delta B$. Оценка (2.25) ([3]) примет вид

$$|x_s(t_m) - x_s^h(t_m)| < \frac{N\delta B}{2L} h [e^{nLT} - 1], \quad t_0 \leqslant t_m \leqslant t_0 + T.$$

По выбранному ранее T подбираем $h > 0$ настолько малым, чтобы T было кратно h и

$$|x_{sm} - x_{sm}^h| < \frac{\delta}{4} \quad \text{при } t_0 \leqslant t_m \leqslant t_0 + T. \tag{8}$$

Очевидно,

$$h \leqslant \frac{L}{2NB [e^{nLT} - 1]}. \tag{9}$$

Из сравнения неравенств (5) и (6), (6) и (8) получаем

$$|x_{sm}^h| < \varepsilon \quad \text{при } t_0 \leqslant t_m \leqslant t_0 + T,$$

$$|x_s^h(t_0 + T)| < \frac{\delta}{2}.$$

Рассмотрим теперь траекторию уравнения (1), начавшуюся в момент времени $\bar{t}_0 = t_0 + T$ в точке $x_s^h(t_0 + T)$. Пусть это будет траектория $\bar{x}_s(t)$. Так как $|\bar{x}_s(\bar{t}_0)| < \delta/2$, то на основании (4) следует, что

$$|\bar{x}_s(t)| < \frac{\delta}{2B} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } t \geqslant \bar{t}_0 \tag{10}$$

и, кроме того,

$$|\bar{x}_s(\bar{t}_0 + T)| < \frac{\delta}{8}, \tag{11}$$

так как выбранные T и δ от начальных значений не зависят.

Оценка $|x_{sm} - x_{sm}^h|$ с учетом (9) дает

$$|\bar{x}_s(t_m) - x_s^h(t_m)| < \frac{\delta}{8}, \quad t_0 + T \leqslant t_m \leqslant t_0 + 2T. \tag{12}$$

Из соотношений (10), (11), (12) следует

$$|x_s^h(t_m)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } t_0+T\leqslant t_m\leqslant t_0+2T,$$

$$|x_s^h(t_0+2T)|<\frac{\delta}{4}.$$

Продолжая дальше доказательство, получим: для любого $n\geqslant 1$ справедливы соотношения

$$|x_s^h(t_m)|<\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}, \quad t_0+(n-1)T\leqslant t_m\leqslant t_0+nT,$$

$$|x_s^h(t_0+nT)|<\frac{\delta}{2^n}.$$

Последние оценки показывают, что если $|x_{s0}^h|<\delta$, то при $m\geqslant 0$ $|x_{sm}^h|<\varepsilon$ и $\lim x_{sm}^h=0$ равномерно относительно t_0, $x_{10}^h,\ldots,x_{n0}^h$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если $X_s(t, x_1,\ldots,x_n)$ линейные функции $x_1,\ldots,x_n$, причем коэффициенты и их первые производные — непрерывные ограниченные функции t, и нулевое решение системы (1) равномерно относительно t_0 асимптотически устойчиво, то при достаточно малом h нулевое решение системы (2) также асимптотически равномерно относительно t_0 устойчиво.

Нужно отметить, что требование равномерной асимптотической устойчивости, не являясь необходимым, является существенным, а не только связано с приведенным методом доказательства.

Простой пример системы:

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{t+1}r; \quad \frac{d\varphi}{dt}=1$$

показывает, что при отсутствии равномерности асимптотической устойчивости может не сохраняться при переходе к соответствующей системе конечноразностных уравнений даже простая устойчивость нулевого решения.

Аналогично теореме 1 могут быть доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Если для любого решения системы* (2) *при некотором достаточно малом* $h>0$ *с начальными значениями из области*

$$|x_{s0}^h|\leqslant x\leqslant H, \quad 0\leqslant t_0<\infty$$

выполняются неравенства

$$|x_{sm}^h|<Bxe^{-\alpha mh},$$

где B *и* α *— положительные постоянные, не зависящие от* t_0, $x_{10}^h,\ldots,x_{n0}^h$, *то нулевое решение системы* (1) *асимптотически равномерно относительно* t_0, $x_{10},\ldots,x_{n0}$ *устойчиво.*

Для того чтобы теорема 2 была справедлива, шаг исходного разностного уравнения (2) должен удовлетворять неравенству:

$$h\leqslant\left\{\frac{e^{-nLT}}{4nL};\ \frac{Le^{-nLT}}{2N[e^{nLT}-1]}\right\},$$

где T находится, как и ранее, из (6).

Теорема 3. *Если нулевое решение системы* (1), *правые части которой — формы* k*-го порядка* $(k\geqslant 2)$, *не зависящие от* t, *асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы* (2) *при достаточно малом* h *также асимптотически устойчиво.*

Нужно заметить, что указанные три теоремы останутся справедливыми, если вместо системы (2), соответствующей (1), рассмотреть систему

$$x^h_{s,m+1} = x^h_{sm} + hY_s(h, t_m, x^h_{1m}, \ldots, x^h_{nm}),$$

где функции Y_s непрерывно дифференцируемы по h в сегменте $[0, \bar{h}]$, $Y_s(0, t, x_1, \ldots, x_n) \equiv X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
25 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Жуковский, Полн. собр. соч., в. 4, 1939, стр. 330—341. [2] Основы автоматического регулирования, 1954, стр. 563—610. [3] Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, 1953, стр. 29.