Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. Т. МЕДВЕДЕВ

СТЕПЕНИ ТРУДНОСТИ МАССОВЫХ ПРОБЛЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 VII 1955)

1. В настоящей работе вводится и изучается на основе теории рекурсивных функций понятие массовой проблемы. Мы исходим из следующей схемы. Пусть решение какой-либо математической задачи требует производства бесконечной последовательности элементарных актов, в целом подчиненных определенному условию. Допустим, что результат каждого такого акта может быть охарактеризован натуральным числом. Задачи этого типа мы будем называть массовыми проблемами. На языке арифметики сказанное формулируется так: массовая проблема есть задача построения некоторой функции $f(x)$ (с натуральными значениями и аргументом), обладающей заданным свойством. Функции $f(x)$, «разрешающие функции» какой-либо массовой проблемы A, образуют класс, полностью ее характеризующий. И наоборот, в ряде случаев удобно исходить из некоторого класса функций, определяя через него проблему. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять всякую рассматриваемую проблему A с классом $\{f\}$ ее разрешающих функций и писать $A = \{f\}$.

Проблему с пустым классом разрешающих функций назовем несобственной или абсолютно неразрешимой. Проблему назовем алгоритмически разрешимой или, просто, разрешимой, если среди ее разрешающих функций найдется хотя бы одна общерекурсивная, и (алгоритмически) неразрешимой в противном случае.

Проиллюстрируем вышеизложенное двумя примерами: проблемы разрешимости (множества или функции) и проблемы перечислимости множества. В первом случае класс разрешающих функций содержит один единственный элемент (характеристическую фунцию заданного множества или заданную функцию). Проблемы разрешимости широко известны под этим термином, им посвящены разнообразные исследования. Отметим статью Клина и Поста ([1]), по форме близкую к настоящей работе. В случае проблемы перечислимости некоторого множества M соответствующий класс разрешающих функций состоит из функций $f(x)$, удовлетворяющих требованиям: 1) $f(x) \in M$ при любом x; 2) если $y \in M$, то найдется такое x, что $f(x) = y$.

2. Наряду с понятием массовой проблемы основным в настоящей работе является следующее определение:

Определение. Проблема $B = \{g\}$ (алгоритмически) сводится к проблеме $A = \{f\}$, если существует частично рекурсивная операция (см. ([2])) $R(\varphi)$, переводящая каждую функцию $f \in A$ в некоторую (зависящую от f) функцию $g \in B$.

Две проблемы, сводящиеся одна к другой, назовем эквивалентными. Под степенью трудности $a = |A|$ проблемы A будем понимать совокупность всех проблем, эквивалентных A. Отношение сводимости рефлексивно и транзитивно, поэтому совпадение степеней трудности $a = |A|$ и $b = |B|$ равносильно эквивалентности самих проблем A и B. По той же

причине степени трудности образуют частично упорядоченное множество в следующем смысле: $a \geqslant b$ («a равно или больше b») тогда и только тогда, когда какая-нибудь проблема со степенью трудности b сводится к какой-нибудь проблеме со степенью трудности a. Все дальнейшее посвящено изучению так получаемого частично упорядоченного множества Ω. Его элементы мы будем называть далее также проблемами. Это означает, что проблемы рассматриваются далее «с точностью до эквивалентности». Если $a \geqslant b$, то будем также говорить, что проблема b сводится к проблеме a. Соотношение $a > b$, означающее, что $a \geqslant b$ и что неверно $b \geqslant a$, будем читать так: «a имеет более высокую степень трудности, чем b». Очевидно, Ω имеет наименьший элемент 0 («разрешимая проблема») и наибольший элемент ∞ («абсолютно неразрешимая проблема»).

3. В этом пункте обнаруживаются важные свойства частично упорядоченного множества Ω.

Теорема 1. *Множество Ω есть структура.*

Это значит, что любые два элемента a, $b \in \Omega$ имеют наименьшую верхнюю грань $a \wedge b$ и наибольшую нижнюю грань $a \vee b$, которые мы называем, соответственно, конъюнкцией и дизъюнкцией проблем a и b. Разрешимость проблем $a \wedge b$, $a \vee b$ означает, соответственно, разрешимость обеих проблем a и b, разрешимость по крайней мере одной из проблем a и b.

Замечание. В [1] показано, что во множестве всех проблем разрешимости две проблемы разрешимости могут и не иметь наибольшей нижней грани. Отсюда вытекает существование (собственных) проблем, отличных от проблем разрешимости (см. по этому поводу также пункт 5 настоящей работы).

Теорема 2. *При любых a, $b \in \Omega$ существует наименьший элемент c^* во множестве таких $c^* \in \Omega$, что $a \wedge c^* \geqslant b$.*

Проблему c назовем импликацией проблем a и b или проблемой сводимости проблемы b к проблеме a и обозначим через $a \supset b$. Разрешимость $a \supset b$ означает, что b сводится к a. Под $a \sim b$ будем понимать проблему $(a \supset b) \wedge (b \supset a)$. Очевидно, равенство $a = b$ имеет место тогда и только тогда, когда $a \sim b = 0$. Пусть X — любое выражение, обозначающее некоторую проблему. Условимся запись $\vdash X$ понимать как утверждение о разрешимости X. Например, $\vdash a \supset b$, $\vdash a \sim b$ означает, соответственно, что $a \geqslant b$, $a = b$. Следующая теорема систематизирует некоторые свойства операций $\wedge$, $\vee$ и $\supset$.

Теорема 3. *Справедливы тождества*:

$$\vdash a \wedge (b \vee c) \sim (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad \vdash a \vee (b \wedge c) \sim (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$
$$\vdash a \supset (b \wedge c) \sim (a \supset b) \wedge (a \supset c), \quad \vdash a \supset (b \vee c) \sim (a \supset b) \vee (a \supset c),$$
$$\vdash (a \vee b) \supset c \sim (a \supset c) \wedge (b \supset c), \quad \vdash a \supset (b \supset c) \sim (a \wedge b) \supset c,$$
$$\vdash [(a \supset b) \wedge (a \supset c)] \supset (a \supset c).$$

4. Теорема 3 наводит на мысль о существовании связи намеченной выше теории массовых проблем с логикой высказываний. Настоящий пункт посвящен этому вопросу.

Известно, что интуиционистское исчисление высказываний Брауэра основано на следующих 11 постулатах:

$$\vdash a \supset (a \wedge a), \quad \vdash a \wedge b \supset b \wedge a, \quad \vdash (a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c),$$
$$\vdash [(a \supset b) \wedge (b \supset c)] \supset (a > c), \quad \vdash b \supset (a \supset b),$$
$$\vdash [a \wedge (a \supset b)] \supset b, \quad \vdash a \supset (a \vee b), \quad \vdash a \vee b \supset b \vee a,$$
$$\vdash [(a \supset c) \wedge (b \supset c)] \supset (a \vee b \supset c), \quad \vdash \bar{a} \supset (a \supset b),$$
$$\vdash [(a \supset b) \wedge (a \supset \bar{b}] \subset \bar{a}$$

и трех правилах вывода:

1. Из $\vdash p \wedge q$ следует p;

2. Из $\vdash p$ и $\vdash p \supset q$ следует q;

3. Из $\vdash p(a, b, c, \ldots)$ следует $\vdash p(q, r, s, \ldots)$.

Здесь $a, b, c, \ldots$ обозначают произвольные высказывания, $p, q, r, s, \ldots$ — произвольные элементарные функции высказываний ([3]).

В 1932 г. А. Н. Колмогоров предложил интерпретацию интуиционистской логики в виде построенного им «исчисления проблем» ([4]). Однако понятию «проблема» не придавался точный смысл. В этой связи излагаемое ниже может рассматриваться как уточнение идей А. Н. Колмогорова (о другом подходе к этим вопросам см. ([5,6])). Нам нужно ввести еще аналог отрицания высказываний для массовых проблем. Будем рассматривать лишь проблемы x из какого-нибудь фиксированного сегмента $0 \leqslant x \leqslant e$ множества Ω. Назовем проблемой, дополнительной к проблеме x (относительно проблемы e), и обозначим через $\bar{x}$ проблему $x \supset e : \bar{x} = x \supset e$.

Теорема 4. *Все постулаты и правила вывода интуиционистской логики выполняются и для массовых проблем x из произвольного сегмента $0 \leqslant x \leqslant e$. Таким образом, «исчисление массовых проблем» является интерпретацией интуиционистской логики.*

Отметим, что «закон исключенного третьего»: $\vdash a \vee \bar{a}$ теряет силу всякий раз, когда $0 < a < e$. В этом случае для $c = \bar{a} \vee a$ имеем: $c \neq 0$, $\bar{c} = (a \vee \bar{a}) \supset e = a \supset e \wedge \bar{a} \supset e = \bar{a} \wedge \bar{\bar{a}} = e$, $\bar{\bar{c}} = 0$, и соотношение $\vdash \bar{\bar{c}} \supset c$ оказывается неверным.

5. В заключение приведем несколько предварительных результатов, касающихся структуры массовых проблем.

Теорема 5. *Для любой проблемы $a \neq \infty$ существует проблема разрешимости b, имеющая более высокую степень трудности: $b > a$.*

(Заметим, что проблема разрешимости не может быть несобственной.)

Оказывается, далее, что множество Ω имеет пустые интервалы (a, b), где $a < b$. Более того, имеет место теорема:

Теорема 6. *Для любой проблемы разрешимости a множество таких $x \in \Omega$, что $x > a$, имеет наименьший элемент.*

Следствие. Среди неразрешимых проблем имеется наименьшая (или, что то же, наинизшей степени трудности).

Именно, такой проблемой будет задача построения функции, не являющейся общерекурсивной. Будем говорить, что a есть проблема типа I если a можно представить в форме $a = \bigvee_1^n (b_k \supset c_k)$, где $b_k (k = 1, 2, \ldots n)$ — произвольные проблемы, c_k — проблемы разрешимости и n — некоторое натуральное число. Далее, назовем (по аналогии с ([1])) произвольные проблемы $d_1, d_2, \ldots, d_l$ независимыми, если ни одна из них не сводится к конъюнкции остальных.

Теорема 7. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — любые неразрешимые проблемы типа* I, *b — любая проблема разрешимости. Тогда существуют проблемы разрешимости $c_1, c_2, \ldots, c_m$ такие, что*

1) *Проблемы $c_1 \supset a_1, c_2 \supset a_2, \ldots, c_m \supset a_m$ независимы.*

2) *При всяком i, $1 \leqslant i \leqslant m$, к проблеме $c_i \supset a_i$ не сводится никакая проблема разрешимости, отличная от 0.*

3) *При всяком i, $1 \leqslant i \leqslant m$, c_i лежит вне сегмента $0 \leqslant x \leqslant b$.*

Следствия.

1) Среди отличных от 0 проблем разрешимости не существует наименьшей.

2) Существует отличная от 0 проблема сводимости двух проблем разрешимости, к которой не сводится никакая отличная от 0 проблема разрешимости.

3) Для любой проблемы $a \neq 0$ типа I существует отличная от нуля проблема $b < a$.

Обозначим через Σ наименьший класс проблем, содержащий все проблемы разрешимости и вместе с каждой парой проблем a и b содержащий также $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \supset b$. Элементарными назовем те и только те проблемы, которые принадлежат классу Σ.

Применением теорем 3 и 7 получается следующая теорема:

Теорема 8. *Для любой элементарной проблемы $a \neq 0$ существует неразрешимая проблема $b < a$.*

Наконец, сформулируем одну простую теорему о проблемах перечислимости множеств (см. пункт 1).

Теорема 9. 1) *Всякая проблема разрешимости есть проблема перечислимости*: 2) *существует такая проблема перечислимости $a \neq 0$, что к а не сводится ни одна проблема разрешимости $b \neq 0$*; 3) *всякую проблему разрешимости можно рассматривать как конъюнкцию двух проблем перечислимости*: *данного множества и его дополнения.*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. C. Kleene, E. L. Post, Ann. Math., 59, № 3 (1954). [2] S. G. Kleene, Introduction to Metamathematics, 1952. [3] Heuting, Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1 (1930). [4] А. Н. Колмогоров, Math. Zs., 35, No. 1, 58 (1932). [5] S. C. Kleene, J. of Symb. Logic, 10, No. 4, 109 (1945). [6] D. Nelson, Trans. Am. Math. Soc. 61, No. 2, 307 (1947).