Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

ФИЗИКА

Е. Л. ФЕЙНБЕРГ и Д. С. ЧЕРНАВСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕЙТРОНА В МЕЗОННОЙ ТЕОРИИ

(Представлено академиком И. Е. Таммом 1 VI 1955)

1. Общие формулы. Соображения, развитые в (1), побуждают попытаться рассмотреть проблему дейтрона, как существенно нерелятивистскую, методом, исключающим проблему самодействия. В низшем, одномезонном приближении при пренебрежении отдачей (нерелятивистский по нуклонам случай!) задача сводится к отысканию минимума энергии $E = \langle \Phi | H | \Phi \rangle$ путем варьирования функции нуклонов $\psi_0(\mathbf{r})$ и функции псевдоскалярного мезонного поля $g(\mathbf{k})$ ($\mathbf{k}$ — импульс мезона, $\mathbf{r}$ — взаимное расстояние нуклонов).

Здесь $\Phi = \psi_0(\mathbf{r})\left(1 + \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) H_{\mathbf{k}}^{+}\right)\Phi_0$; $H_{\mathbf{k}}^{+}$ — рождающая часть оператора взаимодействия; Φ_0 — функционал мезонного вакуума. Варьирование производится при дополнительном условии (1)

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}}(g^2\omega_{\mathbf{k}} + 2fg) = \delta M\left(1 + \sum_{k} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} g^2\right); \qquad (1)$$

f — константа связи; $\delta M = M - M_0$ — разность между феноменологической и затравочной массами нуклона, причем мы можем считать, например, $\delta M = 0$ (1).

Вместо того чтобы решать совместно уравнения для ψ_0 и g, выведенные в (1), мы применим прямой вариационный метод. Именно, выбрав некоторые пробные функции ψ_0 и g (разумеется, так, чтобы при определенных значениях параметров они допускали падение нуклонов друг на друга) и построив на них среднее значение гамильтониана системы, будем искать его экстремум. Такой метод, конечно, может дать только грубые численные значения параметров дейтрона, в особенности потому, что энергия устойчивого уровня есть малая разность двух больших величин.

При учете (1) энергия равна (см. уравнение (11) в (1)):

$$E - 2M = -\varepsilon_D = \int \psi_0^* \left[\frac{p^2}{M} + \frac{\sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}}(g^2\omega_{\mathbf{k}} + 2fg)\,\varepsilon_{12}\cos \mathbf{kr}}{1 + \sum_{\mathbf{k}} \frac{3k^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} g^2 (1 + \varepsilon_{12}\cos \mathbf{kr})} \right] \psi_0\, d\mathbf{r}\ *, \qquad (2)$$

где черта означает усреднение по ψ_0, а $\varepsilon_{12} = (3k^2)^{-1}(\vec{\sigma}_1\mathbf{k})(\vec{\sigma}_2\mathbf{k})(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)$.

* Поскольку в выражение для энергии входит неизвестная константа f, которая должна определяться из сравнения результатов расчета с опытом, практически следует поступать иначе (2): нужно разрешить уравнение (2) относительно константы связи f и искать ее минимум, задаваясь опытным значением энергии связи. При этом случаю падения частиц друг на друга (отсутствие решения), когда ε_D обращается в бесконечность, соответствует стремление константы f к нулю при любом конечном значении ε_D. Мы, однако, в дальнейшем предпочли минимизировать выражение для энергии, задаваясь некоторыми конкретными значениями f, так как физический смысл получающихся выражений при такой процедуре более ясен.

2. Дополнительное условие. Условию (1) удобно удовлетворять при помощи некоторого предельного перехода (в некотором смысле аналогично предельному λ-процессу ([3])). Сначала выберем

$$g(\mathbf{k}) = -\frac{f}{\omega_k}[q_1(\mathbf{k}) - \beta q_2(\mathbf{k})], \tag{3}$$

где q_1 и q_2 пока совершенно произвольные функции (при $q_1 = 1$, $\beta = 0$ получаем случай теории возмущений, $g(\mathbf{k}) = -f/\omega_k$). Будем считать, что они содержат некоторые множители, обрезающие интегралы от этих функций на предельных значениях импульсов K_1 и K_2. В дальнейшем K_1 и K_2 могут оказаться бесконечно большими, так что никакого ограничения здесь не содержится.

Порядок величины выражений в (1) при этом определяется интегралом:

$$f\int \frac{3k^2}{2\omega_k} d\mathbf{k}\, g(\mathbf{k}) = -f^2 \int \frac{3k^2}{2\omega_k^2} d\mathbf{k}\,(q_1(\mathbf{k}) - \beta q_2(\mathbf{k})). \tag{4}$$

В теории возмущений этот интеграл расходится как куб верхнего предела. Поэтому при достаточно большом значении K_2 интеграл от второго слагаемого в (4) равен $\sim \beta K_2^3$. Будем теперь одновременно стремить $K_2 \to \infty$, $\beta \to 0$ так, чтобы было $\beta K_2^3 = \text{const}$. Тогда можно удовлетворить дополнительному условию (1), какова бы ни была функция $q_1(\mathbf{k})$ (по существу за счет поведения при очень больших $\mathbf{k}$). С другой стороны, при подстановке $g(\mathbf{k})$ в форме (3) в выражение (2) ни один из интегралов не разойдется даже при $K_2 \to \infty$. Поэтому второе слагаемое в (3) при $\beta = 0$ в энергию взаимодействия вклада не дает, и его можно сразу опустить. Таким образом, мы можем отбросить в (3) второе слагаемое в скобке, считать, что $q_1(\mathbf{k})$ вполне произвольно, и более не заботиться о дополнительном условии (1).

3. Пробные функции. В качестве пробной функции для $g(\mathbf{k})$ мы выбирали

$$g(\mathbf{k}) = -\frac{f}{\omega_k} q_1(\mathbf{k}) = -\frac{f}{\omega_k} \gamma e^{-bk} \tag{5}$$

с двумя варьируемыми параметрами γ и b. Пробная функция ψ_0 выбиралась в виде суперпозиции S- и D-функций:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left[\Psi_S + \alpha 2^{-3/2}\left(\frac{3(\vec{\sigma}_1\mathbf{r})(\vec{\sigma}_2\mathbf{r})}{r^2} - 1\right)\Psi_D\right]\chi, \tag{6}$$

где χ — спиновая часть функции; α — варьируемый параметр, определяющий примесь D-состояния. Функции Ψ_S и Ψ_D мы принимали одинаковыми и равными ψ, что, конечно, является огрублением. Исследовалось несколько различных видов пробной функции ψ; из них наибольшая минимизация энергии достигалась при следующей форме:

$$\psi = \text{const}\cdot\sqrt{r}\, e^{-1/2\nu r}(1 - e^{-1/2\nu r}), \tag{7}$$

где ν — варьируемый параметр, определяющий пространственные размеры системы (при падении, т. е. при бесконечном сближении частиц, $\nu \to \infty$).

После подстановки $g(\mathbf{k})$ в виде (5) и ψ_0 в виде (6), (7) в (2) получается громоздкое выражение для энергии, зависящее от 4 параметров (γ, b, α и ν; в теории возмущений $b = 0$, $\gamma = 1$, $\nu = \infty$).

4. Результаты. Аналитическое варьирование выражения для энергии удалось провести только по параметру γ. Минимизация энер-

гии по остальным параметрам производилась численно. В результате были получены следующие значения: $\nu = 2{,}5$; $\alpha = 0{,}33$; $b = 0{,}5$; $\gamma = 1{,}7$. Величина константы связи, которой нужно было задаться для того, чтобы энергия связи совпала с экспериментальной величиной, оказалась равной $f^2/4\pi = 0{,}13$.

Необходимо остановиться на некоторых особенностях полученного решения. Отсутствие падения нуклонов друг на друга связано с уменьшением сингулярности взаимодействия при r, стремящемся к нулю. Оценить поведение взаимодействия в этой области можно следующим образом. Среднее значение энергии взаимодействия (вернее, главный член в нем) с учетом (5) равно:

$$\overline{V} = \gamma\nu^3\left(1 + \gamma^2 \frac{3}{2\pi}\frac{f^2}{4\pi}\frac{1}{b^2}\right)^{-1} F(b\nu, \nu).$$

Здесь F — некоторая сложная функция. Варьируя это выражение по γ, находим $\gamma \sim b/F$, после чего получаем

$$\overline{V} \approx \nu^2 x \cdot F(x, \nu), \tag{8}$$

где введен новый параметр $x = b\nu$, который можно считать практически независимым (таким образом мы переходим к новой системе 4 параметров: ν, x, α, γ). Функция $F(x, \nu)$ такова, что при $\nu \to \infty$ зависимость от ν из нее выпадает.

Для ψ типа (7) зависимость $\overline{V}$ от ν при $\nu \to \infty$ отражает степень сингулярности потенциала при $r \to 0$. Так, $\overline{V} \sim \nu^3$ при $V \sim r^{-3}$ и т. п. В нашем случае при $\nu \to \infty$ среднее значение энергии взаимодействия пропорционально только квадрату ν, а не кубу, как в теории возмущений. Сингулярность потенциала при $r \to 0$, если бы такое понятие можно было ввести, не превышала бы r^{-2} (в действительности, как показывает более точный расчет, зависимость $\overline{V}$ от ν даже еще слабее). Математически это является следствием роста знаменателя, т. е. нормы мезонного поля $N^2(\mathbf{r})$ ([1]) при $r \to 0$, т. е. вызвано затуханием.

Используя полученное решение, можно определить характерные константы дейтрона и сравнить их с опытом. При этом, однако, можно надеяться лишь на совпадение по порядку величины как по причинам, указанным выше, так и потому, что, благодаря почти одинаковой зависимости главных членов в (2) (приблизительно и $\overline{p^2}/M \sim \nu^2$, и $\overline{V} \sim \nu^2$), «потенциальная яма» получается расплывчатой. Это также снижает точность вычислений. Результаты таковы: положив $f^2/4\pi = 0{,}13$, чтобы получить экспериментальное значение энергии связи $\varepsilon_D = 2{,}2$ Мэв, для квадрупольного момента дейтрона получим $Q = +3{,}3 \cdot 10^{-24}$ (экспериментальное значение $+2{,}7 \cdot 10^{-24}$ см^2); для примеси D-состояния $\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \approx 10\%$ (экспериментальное значение недостаточно определенно ([4])) и оценивается в 7%); радиус действия ядерных сил в триплетном состоянии $r_t = 3{,}7 \cdot 10^{-13}$ см (экспериментальная оценка $1{,}8 \cdot 10^{-13}$ см). Таким образом, имеет место согласие с экспериментом по порядку величины.

Аналогично, также вариационным методом, было рассмотрено синглетное рассеяние нейтрона на протоне при малых энергиях: отыскивался экстремум функционала $L = \langle \Phi | H - E | \Phi \rangle$ при дополнительном условии, являющемся частным случаем условия (1), $L = 0$ (E — энергия падающей частицы). Здесь это условие довольно привычно, так как оно соответствует методу Хюльтена ([5]) (но не для потенциального взаимодействия, как обычно, а для вторично квантованного поля, в котором возникают члены собственной энергии).

Результаты имеют еще более приближенный характер, так как здесь потенциальная и кинетическая энергия еще больше, чем в дейтроне, и компенсируют друг друга. При том же $f^2/4\pi = 0{,}13$ вычисленные значения длины рассеяния и радиуса действия сил равны: $a_s = 8 \cdot 10^{-13}$ см и $r_s = 4{,}5 \cdot 10^{-13}$ см) (экспериментальные значения $a_s = 23 \cdot 10^{-13}$ см и $r_s = 2{,}7 \cdot 10^{-13}$ см). Видно, что по порядку величины согласие действительно имеет место, хотя и в меньшей степени, чем в случае дейтрона.

В заключение заметим, что сам факт отсутствия падения в дейтроне, а также то, что при помощи одной константы удалось получить качественное согласие с опытом (учитывая грубость расчетов на большее трудно было рассчитывать), мы склонны рассматривать как некоторый успех метода ([1]) в применении к исследуемой проблеме.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
27 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Л. Фейнберг, Д. С. Чернавский, ДАН, 103, № 3 (1955). [2] L. Rosenfeld, Nuclear Forces, Amsterdam, 1948. [3] Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М., 1946. [4] S. Flügge, Erg. d. exakt. Naturwiss., 26, 165 (1952). [5] Н. Мотт, Г. Месси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.