Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Н. СЛУГИН

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА С. А. ЧАПЛЫГИНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 IV 1955)

1. С. А. Чаплыгин (1) предложил метод приближенного решения дифференциального уравнения, при котором искомое решение аппроксимируется монотонно сходящимися последовательностями верхних и нижних приближений. Идеи метода С. А. Чаплыгина были перенесены на решение других видов операторных уравнений. С общей точки зрения метод С. А. Чаплыгина был исследован А. Н. Балуевым (2), использовавшим аппарат функционального анализа в полуупорядоченных пространствах (3). Однако из теорем А. Н. Балуева нельзя вывести алгорифм самого С. А. Чаплыгина.

Ниже приводится теорема, из которой могут быть выведены теоремы 2 и 3 А. Н. Балуева (2) и алгорифм С. А. Чаплыгина (1), причем все понятия, относящиеся к функциональному анализу в полуупорядоченных пространствах, считаются известными.

2. Назовем множество элементов x полуупорядоченного пространства отрезком $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$, если $\underline{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_0$; $[a, b] \subseteq [c, d]$ обозначает $c \leqslant a \leqslant b \leqslant d$.

Теорема 1. *Пусть на* $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ *задан оператор* P, *причем* $P(\underline{x}_0) \leqslant 0 \leqslant P(\bar{x}_0)$ *и для каждого* $[a, b] \subseteq [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ *существуют аддитивные операторы* $\bar{\Gamma}_{a,b}$ *и* $\underline{\Gamma}_{a,b}$ *такие, что на всем* $[a, b]$

$$\bar{\Gamma}_{a,b}(b - x) \geqslant P(b) - P(x), \quad \underline{\Gamma}_{a,b}(x - a) \geqslant P(x) - P(a),$$

и существуют положительные обратные операторы $\bar{\Gamma}_{a,b}^{-1}$, $\underline{\Gamma}_{a,b}^{-1}$. *Кроме того, пусть существует аддитивный оператор* $\Gamma \geqslant \Gamma_{a,b}, \bar{\Gamma} \geqslant \bar{\Gamma}_{a,b}$ *для всех* $[a, b]$, *имеющий положительный обратный* Γ^{-1}, *и оператор* $\Gamma^{-1}P$ *является монотонно непрерывным.*

Тогда наибольшее и наименьшее на $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ *решения* $\bar{x}$ *и* $\underline{x}$ *уравнения* $P(x) = 0$ *могут быть получены алгорифмом*

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \bar{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_n}^{-1} P(\bar{x}_n), \quad \underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \underline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_n}^{-1} P(\underline{x}_n),$$

$$\bar{x}_n \searrow \bar{x}, \quad \underline{x}_n \nearrow \underline{x} \quad (n \to \infty).$$

Если существует аддитивный оператор Λ, *имеющий положительный обратный оператор, причем*

$$P(x + \Delta x) - P(x) \geqslant \Lambda(\Delta x)$$

для всех $\Delta x > 0$, *то решение единственно:* $\underline{x} = \bar{x} = x^*$.

В частности, при операторах P и $[P'(x)]^{-1}$ (o)-непрерывных, P дважды равностепенно дифференцируемом и $P''(x) \leqslant 0$, *полагая* $\overline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \overline{x}_n} = \underline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \overline{x}_n} = P'(\underline{x}_n)$, $\Gamma = P'(\underline{x}_0)$, $\Lambda = P'(\overline{x}_0)$, получаем теорему 3 А. Н. Балуева ([3]).

В пространстве непрерывно дифференцируемых функций $x = y(t)$ для оператора

$$P(y(t)) = \frac{dy}{dt} - f(t, y),$$

где $y(t_0) = \alpha_0$, $t \geqslant t_0$, $\partial^2 f / \partial y^2 \geqslant 0$, полагая

$$\overline{\Gamma}_{a,b}(\Delta y(t)) = \frac{d(\Delta y)}{dt} - \frac{\partial f(t, a)}{\partial a} \Delta y,$$

$$\underline{\Gamma}_{a,b}(\Delta y(t)) = \frac{d(\Delta y)}{dt} - \frac{f(t, b) - f(t, a)}{b - a} \Delta y,$$

получаем алгорифм С. А. Чаплыгина.

3. Полагая $\overline{\Gamma}_{a,b} = \underline{\Gamma}_{a,b} = \Gamma$ для всех $[a, b]$, получаем процесс итерационного характера.

Теорема 2. *Пусть на отрезке* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ *определены операторы* P *и аддитивный* Γ, *имеющий положительный обратный* Γ^{-1}, *причем для всех* $\Delta x > 0$

$$\Gamma(\Delta x) \geqslant P(x + \Delta x) - P(x).$$

Оператор $\Gamma^{-1} P$ *монотонно непрерывен и* $P(\underline{x}_0) \leqslant 0 \leqslant P(\overline{x}_0)$. *Тогда наибольшее и наименьшее на* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ *решения* $\overline{x}$ *и* $\underline{x}$ *уравнения* $P(x) = 0$ *могут быть получены методом итераций*:

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \Gamma^{-1} P(\overline{x}_n), \quad \underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \Gamma^{-1} P(\underline{x}_n),$$

$$\overline{x}_n \searrow \overline{x}, \quad \underline{x}_n \nearrow \overline{x} \quad (n \to \infty).$$

Достаточные условия единственности приведены в теореме 1.

Частным случаем теоремы 2 является теорема 2 А. Н. Балуева ([2]). Пользуясь условием непрерывности оператора $\Gamma^{-1} P$ вместо условий А. Н. Балуева непрерывности операторов Γ^{-1} и P в отдельности, можно расширить класс уравнений, к которым может быть применен аналог метода С. А. Чаплыгина (см. ниже п° 4). Единственность решения позволяет давать эффективную оценку погрешности приближений, так как при этом $\underline{x}_n \leqslant x^* \leqslant \overline{x}_n$, $\overline{x}_n - \underline{x}_n \searrow 0$.

4. Для уравнения

$$y^{(m)} - f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = 0, \quad y^{(k)}(t_0) = \alpha_k \quad (k = 0, 1, \ldots, m - 1)$$

можно снять условие знакопостоянства всех $\partial f / \partial y^{(k)}$, которым обычно пользуются при построении алгорифма метода С. А. Чаплыгина.

Рассмотрим случай, когда $m = 2$. Пусть существуют непрерывно дифференцируемые функции $\underline{y}_0$, $\overline{y}_0$, удовлетворяющие начальным условиям

$$\underline{y}_0(t_0) = \overline{y}_0(t_0) = \alpha_0, \quad \underline{y}_0'(t_0) = \overline{y}_0'(t_0) = \alpha_1, \tag{1}$$

для которых

$$\underline{y}_0' \leqslant \bar{y}_0', \quad \underline{y}_0'' - f(t, \underline{y}_0, \underline{y}_0') \leqslant 0 \leqslant \bar{y}_0'' - f(t, \bar{y}_0, \bar{y}_0').$$

Пусть для всех функций $y(t)$, удовлетворяющих неравенствам $\underline{y}_0' \leqslant y' \leqslant \bar{y}_0'$ и начальным условиям (1), выполняются неравенства

$$C \geqslant \frac{\partial f}{\partial y} \geqslant -A_0, \quad C \geqslant \frac{\partial f}{\partial y'} \geqslant -A_1 \quad (C > 0,\ A_1 \geqslant 0,\ A_0 \geqslant 0)$$

и функция f непрерывна по своему аргументу t, где $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + L$.

По теореме 2 получаем алгорифм для верхних и нижних приближений:

$$y_{n+1}' = y_n' - \int_{t_0}^{t} e^{\frac{A_1}{2}(\tau - t)} \left[1 + \frac{A_1}{2}(\tau - t)\right] [y_n'' - f(\tau, y_n, y_n')]\, d\tau, \qquad (2)$$

где y^* — решение рассматриваемого уравнения, а числа A_0 и A_1 подобраны так, что $A_1^2 = 4A_0$. Граница применимости алгорифма $L = 2/A_1$. Алгорифм и его границу применимости нетрудно определить и в том случае, когда $A_1^2 \neq 4A_0$.

Случай $m > 2$ может быть приведен к рассмотренному, если положить

$$\bar{A}_{m-1} = A_1, \quad \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\bar{A}_k L^{m-k-2}}{(m-k-2)!},$$

где $\partial f / \partial y^{(k)} \geqslant -A_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ и алгорифм (2) следует переписать для $y_n^{(m-1)}$ вместо y_n'.

Если пользоваться условием непрерывности оператора P, то пришлось бы потребовать выполнения неравенства $\partial f / \partial y^{(k)} \geqslant 0$ и действовать в пространстве старших производных.

5. Л. Э. Эльсгольц [4] заметил, что применение метода С. А. Чаплыгина к дифференциально-разностным уравнениям невозможно. Это замечание неверно. Применим теорему 2 (описывающую процесс типа С. А. Чаплыгина) к решению дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом:

$$F(t, y(t), \ldots, y^{(m)}(t), y(t - \tau(t)), \ldots, y^{(m-1)}(t - \tau(t))) = 0, \qquad (3)$$

запаздывание $\tau(t) \geqslant 0$, начальное условие $y = \varphi(t)$ (где $\varphi(t)$ $m-1$ раз непрерывно дифференцируемая функция) задано на начальном множестве, состоящем из точки t_0 и из тех t, при которых $t \geqslant t_0$, $t - \tau(t) \leqslant t_0$. Если t_0 — изолированная точка, то задаем также $y^{(k)}(t_0) = \alpha_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$.

Рассмотрим отрезок $[\underline{y}_0^{(m)}, \bar{y}_0^{(m)}]$, т. е. все m раз непрерывно дифференцируемые функции $y(t)$, для которых выполнены начальные условия и неравенства $\underline{y}_0^{(m)}(t_0) \leqslant y^{(m)}(t) \leqslant \bar{y}_0^{(m)}(t)$, $F[\underline{y}_0] \leqslant 0 \leqslant F[\bar{y}_0]$. Через $F[y]$ обозначена левая часть уравнения (3).

Пусть на отрезке $[\underline{y}_0^{(m)}, \bar{y}_0^{(m)}]$

$$0 < \underline{A} \leqslant \frac{\partial F}{\partial y^{(m)}} \leqslant 1, \quad -C \leqslant \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}(t)} \leqslant 0, \quad -C \leqslant \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}(t - \tau(t))} \leqslant 0 \qquad (4)$$

$$(C > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Обозначим разность функций, входящих в отрезок $[\underline{y}_0^{(m)}, \overline{y}_0^{(m)}]$, через Δy. Из соотношений $\Delta y^{(m)}(t) \geqslant 0$, $\Delta y^{(m)}(t) \to 0$ следуют, соответственно, соотношения

$$\Delta y^{(k)}(t) \geqslant 0, \quad \Delta y^{(k)}(t) \to 0,$$

$$\Delta y^{(k)}(t - \tau(t)) \geqslant 0, \quad \Delta y^{(k)}(t - \tau(t)) \to 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

так как функция Δy удовлетворяет нулевым начальным условиям и $\tau(t) \geqslant 0$. Поэтому и так как $\Delta y^{(k)}(t - \tau(t)) \leqslant \Delta y^{(k)}(t)$ из неравенств (4) следуют при $\Delta y^{(m)}(t) \geqslant 0$ неравенства

$$\Delta y^{(m)}(t) \geqslant F[y + \Delta y] - F[y] \geqslant \underline{A} \Delta y^{(m)}(t) - 2C \sum_{k=0}^{m-1} \Delta y^{(k)}(t).$$

По теореме 2 получаем алгорифм для верхних и нижних приближений:

$$y_{n+1}^{(m)} = y_n^{(m)} - F[y_n], \quad y_{n+1}^{(k)}(t_0) = \alpha_k \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$\underline{y}_n^{(m)} \nearrow y^{*(m)}, \quad \overline{y}_n^{(m)} \searrow y^{*(m)} \quad (n \to \infty),$$

где y^* — решение уравнения (3). Функции $y_{n+1}^{(k)}(t)$, $y_{n+1}^{(k)}(t - \tau(t))$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$, знание которых необходимо для проведения процесса, определяются по $y_{n+1}^{(m)}(t)$ и начальным условиям.

Так же как в предыдущем пункте, для уравнения

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), \ldots, y^{(m-1)}(t), \quad y(t - \tau(t)), \ldots, y^{(m-2)}(t - \tau(t)))$$

можно ослабить требование неотрицательности производных $\partial f / \partial y^{(k)}(t)$, $\partial f / \partial y^{(k)}(t - \tau(t))$, пользуясь неравенствами $\Delta y^{(k)}(t) \geqslant \Delta y^{(k)}(t - \tau(t))$ при $\Delta y^{(m-1)}(t) \geqslant 0$. При этом также получается ограниченно применимый алгорифм с просто определяемой границей применимости. Вспомогательные линейные уравнения алгорифма являются обыкновенными дифференциальными без запаздывания.

Пользуясь теоремой 1, можно получить быстрее сходящиеся алгорифмы (например, приняв за $\overline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \overline{x}_n} = \underline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \overline{x}_n}$ оператор $\Gamma_n \geqslant P'(x)$ на отрезке $[\underline{x}_n, \overline{x}_n]$).

Комсомольский-на-Амуре
государственный педагогический институт

Поступило
28 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950. [2] А. Н. Балуев, ДАН, 83, № 6, 781 (1952). [3] А. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950. [4] Д. Э. Эльсгольц, Усп. матем. наук, в. 4/56 (1953).