Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

МАТЕМАТИКА

О. Б. ЛУПАНОВ

О ВОЗМОЖНОСТЯХ СИНТЕЗА СХЕМ ИЗ РАЗНООБРАЗНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 14 II 1955)

В теории схем рассматривается вопрос о реализации функций алгебры логики посредством контактных схем. Однако обычно интересуются простейшей реализацией функций. Пусть $L(f)$ — число контактов в простейшей схеме, реализующей функцию f. Введем функцию $L(n) = \operatorname{Max} L(f)$ (максимум берется по всем функциям алгебры логики от n аргументов). Функция $L(n)$ характеризует множество схем для всех функций от n аргументов. Шеннон [1] показал, что для любого $\varepsilon > 0$ и $n > N(\varepsilon)$

$$(1-\varepsilon)\frac{2^n}{n} < L(n) < (1+\varepsilon)\frac{2^{n+2}}{n}. \qquad (1)$$

Известно, что для некоторых функций использование, наряду с контактами, вентилей, сопротивлений и других элементарных средств позволяет существенно упростить схемы. Может показаться, что расширение запаса элементарных средств даст возможность значительно упростить схемы для всех функций. Однако это не так. В заметке показано, что если используется даже гораздо более широкий запас средств (охватывающий все известные автору средства), то при известных (обычно выполненных) ограничениях оценка снизу для $L(n)$ не допускает существенного понижения.

Прежде чем формулировать результат, обобщим определение схемы и связанных с ним понятий.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{M} = \{a_1, \ldots, a_z\}$ — конечное множество и $\Lambda \neq \mathfrak{S}_i \subseteq \mathfrak{M}$ $(i = 0, 1, \ldots, h)$, причем $\mathfrak{S}_0 \subseteq \bigcup_{l=1}^{h} \mathfrak{S}_i = \mathfrak{M}$ (подмножества $\mathfrak{S}_i$ не обязательно попарно различны). Множество $\mathfrak{M}$ с выделенной совокупностью подмножеств будем называть системой и обозначать $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_h)$.

Элементы $\mathfrak{M}$ будем называть вершинами системы, элементы $\mathfrak{S}_0$ — полюсами системы. Число элементов подмножества $\mathfrak{S}_i$ будем называть степенью этого подмножества. Обозначим через h_s число подмножеств $\mathfrak{S}_i$ $(i \neq 0)$ системы степени s; число $\mu = \frac{1}{h}\sum_s s h_s$ будем называть средней степенью системы.

Две системы $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{S}_0^{(1)}, \mathfrak{S}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{S}_{h_1}^{(1)})$ и $\mathfrak{M}_2(\mathfrak{S}_0^{(2)}, \mathfrak{S}_1^{(2)}, \ldots, \mathfrak{S}_{h_2}^{(2)})$ будем называть изоморфными, если между $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ и между $\{\mathfrak{S}_i^{(1)}\}$ и $\{\mathfrak{S}_j^{(2)}\}$ можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что

1) соответствующие (друг другу) множества $\mathfrak{S}_i^{(1)}$ и $\mathfrak{S}_j^{(2)}$ состоят из соответствующих (друг другу) элементов;

2) $\mathfrak{S}_0^{(1)}$ и $\mathfrak{S}_0^{(2)}$ соответствуют друг другу.

Будем говорить, что множество $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ подставлено вместо множества $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_t\}$, если задано отображение множества $\mathfrak{A}$ на множество $\mathfrak{B}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество конечных множеств $E_j = \{\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_{s_j}}\}$, называемых элементарными подсхемами. Систему $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_h)$ с подставленными вместо каждого из подмножеств $\mathcal{E}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ элементарными подсхемами из $\mathfrak{S}$ (не обязательно различными) будем называть схемой над множеством элементарных подсхем $\mathfrak{S}$ и обозначать $\mathfrak{M}(\mathcal{E}_0, E_{j_1}, \ldots, E_{j_h})$ (E_{j_i} подставлено вместо $\mathcal{E}_i$).

Элементы E_j будем называть полюсами этой элементарной подсхемы. Полюсами схемы будем называть полюса системы, из которой получена схема. Максимальное число элементов $E_j \in \mathfrak{S}$ будем называть степенью $\mathfrak{S}$.

Две схемы над $\mathfrak{S}$ будем называть изоморфными, если они получены из изоморфных систем, так что вместо соответственных подмножеств системы подставлена одна и та же элементарная подсхема, причем образы одноименных полюсов подсхем суть соответственные вершины систем.

Теорема 1. *Число различных (неизоморфных) систем, число полюсов которых принимает не более l различных значений, не превосходит*

$$l\{C(\mu)\}^k \cdot k^{(\mu-1)k},$$

если средняя степень систем не превосходит μ и число подмножеств в каждой из систем не превосходит k.

Перейдем к оценке необходимого числа элементарных подсхем в схемах. Пусть имеется последовательность $\mathfrak{S}$ множеств элементарных подсхем $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n, \ldots$ ($\mathfrak{S}_n$ степени не более m и содержит M_n подсхем); над каждым $\mathfrak{S}_n$ построены схемы, средняя степень которых не превосходит μ и число полюсов принимает не более l_n различных значений. Пусть, далее $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_n, \ldots$ — последовательность некоторых множеств ($\mathfrak{N}_n$ содержит N_n элементов). Пусть схемы над $\mathfrak{S}_n$ реализуют элементы $\mathfrak{N}_n$ (каждой схеме поставлено в соответствие некоторое подмножество $\mathfrak{N}_n$, причем изоморфные схемы реализуют одно и то же множество элементов, каждая схема над $\mathfrak{S}_n$ реализует не более ν_n элементов из $\mathfrak{N}_n$ и схемами над $\mathfrak{S}_n$ можно реализовать все элементы $\mathfrak{N}_n$). Обозначим через $L_{\mathfrak{S}}(n)$ наименьшее число такое, что схемами над $\mathfrak{S}_n$, содержащими не более $L_{\mathfrak{S}}(n)$ подсхем, можно реализовать все элементы $\mathfrak{N}_n$.

Теорема 2. *Если при $n \to \infty$ $N_n' = \dfrac{N_n}{\nu_n l_n} \to \infty$ и для некоторого $s > 1$ $(M_n)^{1/\lg_s \lg_s N_n'} \to 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ и $n > N(\varepsilon)$*

$$L_{\mathfrak{S}}(n) > \frac{1-\varepsilon}{\mu - 1} \frac{\lg_s N_n'}{\lg_s \lg_s N_n'} = k(n, \varepsilon), \tag{2}$$

причем доля элементов $\mathfrak{N}_n$, реализуемых схемами, содержащими не более $k(n, \varepsilon)$ подсхем, неограниченно убывает с ростом n.*

* Последнее обстоятельство отмечено Шенноном ([1]) для контактных схем (для оценки (1)).

Замечания. 1°. Если $(\nu_n l_n)^{1/\lg_s N_n}$, то в (2) N_n' можно заменить на N_n.

2°. Если над $\mathfrak{S}_n$ строятся схемы средней степени не более μ и $\overline{\lim}\,\mu_n = \mu$, то

$$L_{\mathfrak{S}}(n) > \frac{1-\varepsilon}{\mu-1}\,\frac{\lg_s N_n'}{\lg_s \lg_s N_n'}.$$

Примеры. В рассматриваемых примерах реализуются функции алгебры логики от n аргументов или некоторые их совокупности. Во всех примерах $s = 2$. При ссылках на оценку (1) имеется в виду оценка снизу.

1°. Реализуются множества различных функций (не более $l = \text{const}$ штук) от n аргументов. Средства, используемые для реализации,— контакты n реле и вентили. Функции f_i реализуются как функции проводимости между полюсами A_0 и A_i.

Тогда $L_{\mathfrak{S}}(n) > (1-\varepsilon_1)\,\frac{l\cdot 2^n}{n+\lg_s l} = (1-\varepsilon)\,\frac{l\cdot 2^n}{n}$ * (оценка для числа контактов и вентилей вместе). Если $l = 1$ и используются только контакты, то оценка совпадает с оценкой (1).

2°. Реализуются функции n аргументов многотактными схемами как функции проводимости между некоторой парой вершин после последнего такта. Средства — контакты n реле и промежуточные реле.

Тогда $L_{\mathfrak{S}}(n) > \frac{1-\varepsilon}{n}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{2^n}{n}$ (оценка для числа контактов «входных» и промежуточных реле). Если доля контактов промежуточных реле неограниченно уменьшается с ростом n, то остается справедливой оценка (1).

3°. Реализация функций n аргументов электронными схемами**.

Для числа управляющих сеток сохраняется оценка (1).

4°. Реализуются функции n аргументов. Средства — контакты n реле и сопротивления (M_n сортов, $M_n = e^{o(n)}$). К парам полюсов схемы $A_0A_1, A_0A_2, \ldots, A_0A_s$ прикладываются напряжения $U_1, U_2, \ldots, U_s$. Функция определяется по напряжению V между полюсами A_0 и B:

$$f = \begin{cases} 0, & \text{если } V < V_0; \\ 1, & \text{если } V \geqslant V_0. \end{cases}$$

Для числа контактов и сопротивлений вместе сохраняется оценка (1).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
10 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. E. Shannon, The Bell Syst. Techn. J., 28, № 1, 59 (1949). [2] Г. Н. Поваров, ДАН, 100, № 5, 909 (1955), [3] Синтез электронных управляющих и вычислительных схем, ИЛ, 1954.

* Аналогичные оценки получены Г. Н. Поваровым ([2]) для больших значений l (для контактных схем).

** Описание см. ([3]).