Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

МАТЕМАТИКА

Е. ЛЕОНТОВИЧ и А. МАЙЕР

О СХЕМЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ТОПОЛОГИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ РАЗБИЕНИЯ НА ТРАЕКТОРИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 IV 1955)

В настоящей работе * рассматривается разбиение на траектории, заданное системой

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в замкнутой области $\overline{G}$, ограниченной простой замкнутой кривой, состоящей из конечного числа чередующихся дуг траекторий и дуг без контакта. При предположении, что число орбитно-неустойчивых траекторий и полутраекторий (см. (1)) конечно, вводится понятие схемы разбиения на траектории, являющейся топологическим инвариантом и определяющей топологическую структуру этого разбиения.

Орбитно-неустойчивые траектории и полутраектории, а также полутраектории, проходящие через общие концы граничных дуг без контакта и дуг траекторий, будем называть «особыми». В дальнейшем предполагается зафиксированным определенное положительное направление обхода простых замкнутых кривых. Кроме того предполагается введенным понятие «положительной» и «отрицательной» «стороны» простой дуги, а также траектории и полутраектории. Полутраектория, относительно которой не указывается, является ли она положительной или отрицательной, обозначается через $L^{(\,)}$.

1. Всякое состояние равновесия O рассматриваемой системы (1) является изолированным и: А) либо O есть «центр», Б) либо существует хотя бы одна стремящаяся к O полутраектория.

При рассмотрении стремящихся к O полутраекторий указывается циклический порядок, в котором они располагаются вокруг точки O. Пусть σ — окружность с центром в O, кроме O не содержащая целиком ни одной особой траектории. Область, состоящая из точек, лежащих внутри σ между двумя данными стремящимися к O полутраекториями $L_1^{(\,)}$ и $L_2^{(\,)}$ и имеющая среди своих граничных точек точку O, называется: а) истинной гиперболической, если все проходящие через ее точки траектории и при возрастании и при убывании t выходят из δ; б) ω (α)-параболической, если все траектории, проходящие через

* Настоящая работа (сделанная в 1951 г.) является непосредственным продолжением работы (1), сделанной в 1937 г. Проведенное в (1) выделение особых траекторий и областей (компонент) с одинаковым поведением траекторий впервые сделано для грубых систем в заметке (2) и в (3), а в 1952 г. в (4) дано развернутое изложение работы (2). В 1954 г. появилась работа Маркуса (5), в которой приводятся без ссылок на (1) и на (2,4) результаты, по существу не отличающиеся от результатов (1). (В частности, лемма 5,3 в (5) тождественна теореме VI в (1), а теорема 7,1 в (5) — теореме VII в (1); несколько более общие предположения, при которых доказана теорема 7,1 в (5), не вносят ничего нового в доказательство.)

достаточно близкие к O точки этой области, при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) не выходя из σ, стремятся к O, а при убывании (возрастании) t выходят из σ; в) истинной эллиптической областью, если через сколь угодно близкие к O точки этой области проходят траектории, которые, не выходя из σ, при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ стремятся к O, при этом все такие траектории вместе с точкой O ограничивают области, являющиеся одна частью другой, а через все достаточно близкие к O точки этой области не проходят траектории, и при возрастании и при убывании t выходящие из σ. Очевидно, в случае а) $L_1^{(\,)}$ и $L_2^{(\,)}$ являются сепаратрисами O (т. е. стремящимися к O орбитно-неустойчивыми полутраекториями), и обратно, если $L_1^{(+)}$ ω-сепаратриса точки O, то непременно существует α-сепаратриса $L_2^{(-)}$ точки O такая, что между $L_1^{(+)}$ и $L_2^{(-)}$ (или между $L_2^{(-)}$ и $L_2^{(+)}$) лежит истинная гиперболическая область. Если эта область лежит по положительную (отрицательную) сторону $L_1^{(+)}$ (и $L_2^{(-)}$), то траектория $L_1^{(+)}$ называется ω-продолжаемой с положительной (отрицательной) стороны, а $L_1^{(-)}$ — ω-продолжением $L_1^{(+)}$ с положительной (отрицательной) стороны.

Лемма 1. *Состояние равновесия O (типа B), к которому стремится не более одной особой полутраектории, есть «топологический узел».*

Лемма 2. *Если между двумя стремящимися к O особыми полутраекториями $L_1^{(\,)}$ и $L_2^{(\,)}$ нет других стремящихся к O особых полутраекторий, то*: а) *в случае, когда обе полутраектории $L_1^{(\,)}$ и $L_2^{(\,)}$ положительны (отрицательны), лежащая между ними область является ω(α)-параболической;* б) *в случае, когда одна из этих полутраекторий положительна, а другая отрицательна, лежащая между ними область является либо истинной гиперболической, либо истинной эллиптической областью.*

Мы скажем, что дана полная схема состояния равновесия O, если указано, принадлежит ли оно к типу А или к типу Б и, кроме того, в случае, когда оно принадлежит к типу Б: а) перечислены в циклическом порядке все стремящиеся к O особые полутраектории с указанием того, какие из этих полутраекторий положительны и какие отрицательны; б) указано для каждых двух непосредственно следующих друг за другом особых полутраекторий, из которых одна положительна, а другая отрицательна, лежит ли между ними истинная гиперболическая или истинная эллиптическая область.

2. Пусть K — континуум, состоящий из траекторий, среди которых есть отличные от состояний равновесия, либо ω(α)-предельный для какой-либо траектории L (отличной от принадлежащих K), либо граничный для компоненты, заполненной замкнутыми траекториями (в последнем случае K называется O-предельным континуумом). Точки траектории L (или точки компоненты, для которой K является граничным континуумом) могут лежать только по одну сторону от принадлежащих K траекторий. При этом, наряду с L, все траектории, достаточно близкие к K и лежащие по ту же, что и L, сторону от принадлежащих K траекторий, имеют K своим ω(α)-предельным континуумом. Поэтому в дальнейшем ω(α, 0)-предельный континуум K рассматривается всегда как «односторонне предельный», так что всякая траектория, ω(α, 0)-предельная с обеих сторон (очевидно, для различных траекторий) всегда фигурирует в двух «односторонних» континуумах. В силу небольшой модификации теоремы Бендиксона, для того чтобы континуум K, состоящий из особых траекторий (среди которых есть отличные от состояний равновесия), являлся ω(α, 0)-предельным с положительной (отрицательной) стороны, необходимо и достаточно: либо чтобы K был замкнутой траекторией, либо чтобы

все принадлежащие K отличные от состояния равновесия траектории при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ стремились к состояниям равновесия и были $\omega(\alpha)$-продолжением одна другой с положительной (отрицательной) стороны. Поэтому все входящие в $\omega(\alpha, 0)$-предельный континуум траектории могут быть перечислены в последовательности

$$L_{i_1} O_{i_1} L_{i_2} O_{i_2} \ldots L_{i_k} O_{i_k}, \qquad (2)$$

в которой всякая траектория L_{i_k} является ω-продолжением $L_{i_{k-1}}$, а L_{i_1} — ω-продолжением L_{i_k} и указано, какие из состояний равновесия совпадают друг с другом. Будем говорить, что дана локальная схема $\omega(\alpha, 0)$-предельного континуума K, если указано, является ли этот континуум ω-, α- или O-предельным, и при этом с какой стороны, и все входящие в него траектории перечислены в последовательности вида (2).

Лемма 3. *ω-, α- или O-предельный континуум K состоит из конечного числа простых и замкнутых кривых S_i (образованных из входящих в K траекторий) и при этом:* а) *каждая из кривых S_i может иметь не более одной общей точки, являющейся состоянием равновесия, с каждой из остальных кривых S_j и в случае, когда K состоит более чем из одной кривой S_i, заведомо имеет общую точку хотя бы с одной из них;* б) *области внутри S_i либо лежат одна вне другой (континуум I типа), либо область, ограниченная одной из этих кривых («главной» кривой), содержит все остальные, лежащие одна вне другой (континуум II типа).*

Континуум, состоящий из одной только кривой S, причисляется и к I и ко II типу. В случае, когда K состоит более чем из одной кривой S, берутся какие-либо две из этих кривых S_{i_1} и S_{i_2}, имеющие общую точку — состояние равновесия O — и рассматриваются четыре стремящиеся к O полутраектории $L_j^{(\,)}$, выделенные из траекторий, входящих в S_{i_1} и S_{i_2}. В ряде вспомогательных лемм устанавливается связь между циклическим порядком, в котором полутраектории $L_j^{(\,)}$ расположены вокруг точки O, и тем, совпадает или нет направление положительного обхода на S_{i_1} и S_{i_2} с направлением по t, как в случае, когда области, ограниченные S_{i_1} и S_{i_2}, лежат одна вне другой, так и в случае, когда эти области лежат одна внутри другой. $\omega(\alpha, 0)$-предельный континуум называется «свободным», если нет стремящихся к нему особых полутраекторий, и «несвободным», если такие полутраектории существуют (O-предельный континуум всегда «свободный»). *В окрестности $\omega(\alpha)$-предельного континуума K, не содержащей целиком, кроме принадлежащих K, ни одной особой траектории, всегда может быть проведен цикл без контакта C, который пересекают все стремящиеся к K полутраектории (и только такие полутраектории).* Циклический порядок, в котором на C расположены точки стремящихся к K особых полутраекторий, называется циклическим порядком стремящихся к K особых полутраекторий.

Мы скажем, что дана полная схема $\omega(\alpha)$- или O-предельного континуума K, если: 1) дана локальная схема K; 2) вокруг каждого входящего в K состояния равновесия O указан циклический порядок среди стремящихся к O и принадлежащих K полутраекторий; 3) указано, на каких из составляющих K кривых S_i положительное направление обхода совпадает с направлением по t и на каких оно противоположно; 4) если K $\omega(\alpha)$-предельный несвободный континуум, то указан циклический порядок стремящихся к нему особых полутраекторий.

3. Далее вводится также «схема границы» $\overline{G}$, описание которой опускается. К свободным $\omega(\alpha)$-предельным континуумам I типа присоединяется состояние равновесия типа Б), к которому не стремится ни одна особая полутраектория.

Лемма 4. *Если границ $\overline{G}$ не есть цикл без контакта, то для всякого свободного $\omega(\alpha, 0)$-предельного континуума K I типа* (II *типа*) *можно указать $\alpha(\omega, 0)$-предельный свободный континуум K^* II типа* (I *типа*) *такой, что:* а) *континуум K (K^*) содержится внутри главной кривой S_k континуума K^* (K);* б) *не существует больше ни одной простой замкнутой кривой, входящей в состав какого-либо $\alpha(\omega, 0)$-предельного континуума, содержащейся внутри ($S_\varkappa$) и содержащей K (K^*) внутри.*

Континуумы K^* и K называются сопряженными друг с другом. Область, граница которой состоит из континуумов K^* и K, является двусвязной компонентой ([5]). В случае, когда граница $\overline{G}$ есть цикл без контакта C, может существовать двухсвязная компонента, граница которой состоит из C и $\omega(\alpha)$-предельного континуума.

Мы скажем, что дана полная схема разбиения на траектории, определенного системой (1), если перечислены все особые траектории и полутраектории, граничные дуги без контакта и граничные дуги траекторий этого разбиения и даны: 1) схема границы области $\overline{G}$; 2) полные схемы всех состояний равновесия; 3) полные схемы всех ω-, α-, O-предельных континуумов; 4) указано взаимное расположение всех свободных ω-, α-, O-предельных континуумов. Затем устанавливается естественным образом понятие изоморфизма двух полных схем разбиения на траектории, заданных двумя системами вида (1).

Теорема. *Для того чтобы топологическая структура двух разбиений на траектории, заданных двумя системами вида* (1), *в областях $\overline{G}$ и $\overline{G}'$ была тождественна, необходимо и достаточно, чтобы полные схемы этих двух разбиений были изоморфны.*

Исследовательский физико-технический институт
Горьковского государственного университета

Поступило
3 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Леонтович, А. Майер, ДАН, **14**, № 5 (1937). [2] А. Андронов, Л. Понтрягин, ДАН, **14**, № 5 (1937). [3] А. Андронов, С. Хайкин, Теория колебаний, 1937. [4] H. F. Debaggis, Contributions of the Theory of Nonlinear Oscillations, **2**, Prinston, 1952. [5] L. Markus, Trans. Am. Math. Soc., **76**, No. 1 (1954).