Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. А. ЛЕБЕДЕВ

К ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КРУГА НА НЕНАЛЕГАЮЩИЕ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 IV 1955)

Пусть на плоскости w дана односвязная область D и в ней различные точки $a_k \neq \infty$ $(k = 1,2, \ldots, n; n > 1)$. Пусть функция $f_k(\zeta)$, $f_k(0) = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ однолистно и конформно отображает круг $|\zeta| < 1$ на область D_k $(a_k \in D_k)$. Пусть области D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ не имеют друг с другом общих точек и все лежат в области D. Множество совокупностей n функций $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$, $\ldots$, $f_n(\zeta)$ для всех возможных областей D_k назовем системой $Q_D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Множество точек $M(|f_1'(0)|, |f_2'(0)|, \ldots, |f_n'(0)|)$ (в декартовой системе координат) для всех возможных областей D_k обозначим через $\mathfrak{E}_D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Если $\xi = F(w)$ — функция, однолистно и конформно отображающая область D, лежащую на плоскости w, на область D^*, лежащую на плоскости ξ, и если точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{E}_D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то точка $M(|F'(a_1)|\, x_1, |F'(a_2)|\, x_2, \ldots, |F'(a_n)|\, x_n) \in \mathfrak{E}_{D^*}(F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n))$.

Отсюда ясно, что особенно интересны следующие три случая:

1. Область D — вся плоскость w (включая и точку $w = \infty$). В этом случае обозначим $\mathfrak{E}_D(a_1, \ldots, a_n)$ через $E(a_1, \ldots, a_n)$, а $Q_D(a_1, \ldots, a_n)$ через $P(a_1, \ldots, a_n)$.

2. Область D — вся плоскость w, исключая точку $w = \infty$. Обозначим $\mathfrak{E}_D(a_1, \ldots, a_n)$ через $E_\infty(a_1, \ldots, a_n)$, а $Q_D(a_1, \ldots, a_n)$ через $P_\infty(a_1, \ldots, a_n)$.

3. Область D — круг $|w| < R$. Обозначим $\mathfrak{E}_D(a_1, \ldots, a_n)$ через $E_R(a_1, \ldots, a_n)$, а $Q_D(a_1, \ldots, a_n)$ — через $P_R(a_1, \ldots, a_n)$.

Из принципа Линделефа следует, что если точка $M(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathfrak{E}_D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{E}_D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принадлежит и весь параллелепипед $0 < x_k \leqslant x_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть на плоскости w заданы различные точки a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где $a_n = \infty$ $(n \geqslant 1)$. Пусть области D_k $(a_k \in D_k)$ не налегают друг на друга. Пусть функция $w = f_k(\zeta)$, $f_k(0) = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ однолистно и конформно отображает $|\zeta| < 1$ на D_k и $f_n(\zeta)$, $f_n(\infty) = \infty$, однолистно и конформно отображает область $|\zeta| > 1$ на D_n. Множество точек $M\left(|f_1'(0)|, \ldots, |f_{n-1}'(0)|, \frac{1}{|f_n'(\infty)|}\right)$ для всех возможных областей D_k обозначим через $\mathfrak{E}(a_1, a_2, \ldots, \infty)$.

Пользуясь дробно-линейным преобразованием, легко установить взаимно-однозначное соответствие между точками $E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathfrak{E}\left(0, \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_n}, \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_n}, \ldots, \infty\right)$.

Теорема 1. *Множество точек* $M(x, y) \in \mathcal{E}(0, \infty)$ *определяется неравенствами* $0 < xy \leqslant 1$, $x > 0$. *Знак равенства реализуется функциями* $w = f_1(\zeta) = t\zeta$, $|\zeta| < 1$, *и* $w = f_2(\zeta) = t\zeta$, $|\zeta| > 1$, *при каждом* t, $0 < t < \infty$.

Доказательство. Если точка $M(x_0, y_0) \in \mathcal{E}(0, \infty)$ и реализуется функциями $w = f_1(\zeta)$, $f_1(0) = 0$, и $w = f_2(\zeta)$, $f_2(\infty) = \infty$, то точка $M(tx_0, y_0/t) \in \mathcal{E}(0, \infty)$ при любом t $(0 < t < \infty)$ и реализуется функциями $w = tf_1(\zeta)$ и $w = tf_2(\zeta)$. Это значит, что если $M(x_0, y_0) \in \in (0, \infty)$, то и каждая точка ветви гиперболы $xy = x_0y_0$, лежащей в первом квадранте, также принадлежит $\mathcal{E}(0, \infty)$. Далее, если функция $w = f_1(\zeta)$, $f_1(0) = 0$, однолистно и конформно отображает круг $|\zeta| < 1$ на область D с площадью S, а функция $w = f_2(\zeta)$, $f_2(\infty) = \infty$, однолистно и конформно отображает область $|\zeta| > 1$ на область D_2, лежащую вне D_1, то с одной стороны $|f_1'(0)| \leqslant S$ и с другой стороны $|f_2'(\infty)| \geqslant S$.

Знак равенства в обоих случаях имеет место в том и только в том случае, если D_1 есть круг $|w| < \sqrt{S/\pi}$, а D_2 есть область $|w| > \sqrt{S/\pi}$. Значит, $|f_1'(0)| / |f_2'(\infty)| \leqslant 1$. Отсюда и следует заключение теоремы.

Следствие. *Множество точек* $M(x, y) \in E(a_1, a_2)$ *определяется неравенствами* $0 < xy \leqslant |a_1 - a_2|^2$, $x > 0$. *Знак равенства имеет место в том и только в том случае, если* $w = f_1(\zeta) = \frac{a_1k_1 - a_2\zeta}{k_1 - \zeta}$, $w = f_2(\zeta) = \frac{a_2k_2 - a_1\zeta}{k_2 - \zeta}$, *где* k_1 *и* k_2 *— произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию* $|k_1k_2| = 1$.

Отсюда сразу следует результат М. А. Лаврентьева (1): если функции $w = f_k(\zeta)$, $f_k(0) = a_k \neq \infty$ $(k = 1, 2)$ регулярны и однолистны в $|\zeta| < 1$ и отображают $|\zeta| < 1$ на не налегающие друг на друга области, то $|f_1'(0) f_2'(0)| \leqslant |a_1 - a_2|^2$ и знак равенства имеет место в том и только в том случае, если $w = f_1(\zeta) = \frac{a_1k_1 - a_2\zeta}{k_1 - \zeta}$, $w = f_2(\zeta) = \frac{a_2k_2 - a_1\zeta}{k_2 - \zeta}$, где k_1 и k_2 — произвольные комплексные числа, по модулю равные единице.

Теорема 2. *Область* $E_\infty(a_1, a_2)$ *ограничена кривой*

$$L \begin{cases} x = |a_1 - a_2|(1 + t)^2 |t|^{-\frac{2t}{1+t}}, \\ y = |a_1 - a_2|(1 - t)^2 |t|^{\frac{2t}{1-t}}, \end{cases} \qquad -1 < t < 1,$$

и координатными осями.

Задача разыскания кривой L сводится к разысканию наименьшего значения величины $I = (|f_1'(0)| - A)^2 + (|f_2'(0)| - B)^2$ при произвольно заданных A и B таких, что $M(A, B) \overline{\in} E_\infty(a_1, a_2)$, среди функций $w = f_k(\zeta)$, $f_k(0) = a_k$ $(k = 1, 2)$ из $P_\infty(a_1, a_2)$. Разыскание наименьшего значения I производится вариационным методом Г. М. Голузина (2) подобно тому, как это делала Л. И. Колбина (3).

Опираясь на эту теорему, легко получим оценку сверху произведения $|f_1'(0)|^\alpha |f_2(0)|^\beta$ при любых фиксированных положительных α и β для функций $f_k(\zeta)$, $f_k(0) = a_k$ $(k = 1, 2)$, из $P_\infty(a_1, a_2)$, найденную Л. И. Колбиной (3).

Следствие. *Для функций* $f_k(\zeta)$, $f_k(0) = a_k$, $k = 1, 2$, *из* $P_\infty(a_1, a_2)$ *имеет место точное неравенство*

$$|\ln(|f_1'(0)|A)]\,[\ln(|f_2'(0)|A)] \geqslant \ln^2\left[\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}\gamma^{-\frac{\sqrt{\gamma}}{1-\gamma}}\right], \quad A=(1-\gamma)\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

при любом γ; $0<\gamma<1$.

Замечание. Из теоремы 2 может быть получена как следствие теорема 1.

Теорема 3. *Область* $E_R(a_1, a_2)$ *ограничена координатными осями и кривой*

$$L\begin{cases} x=\varphi(a, |a_1|, t), \\ y=-\varphi(-a, |a_2|, -t), \end{cases} \quad -1<t<1,$$

где $a=\left|\dfrac{R(a_2-a_1)}{R^2-\bar{a}_1a_2}\right|$ *и*

$$\varphi(a, |a_1|, t)=\begin{cases} \dfrac{a}{(1-a)^2}\dfrac{R^2-|a_1|^2}{R}(1+t)^2|t|^{-\frac{2t}{1+t}} & \text{при } -1<t\leqslant -a, \\ \dfrac{R^2-|a_1|}{R}|a|^{\frac{1-t}{1+t}} & \text{при } -a<t<a, \\ \dfrac{a}{(1+a)^2}\dfrac{R^2-|a_1|^2}{R}(1+t)^2|t|^{-\frac{2t}{1+t}} & \text{при } a\leqslant t<1. \end{cases}$$

Кривую L получим, опираясь на работу П. П. Куфарева [4] и работу П. П. Куфарева и А. Э. Фалеса [5]. Опираясь на эту теорему, легко получим оценку сверху произведения $|f_1'(0)|^\alpha|f_2'(0)|^\beta$ при любых фиксированных положительных α и β для функций $f_k(\zeta)$, $f_k(0)=a_k$ $(k=1, 2)$, из $P_R(a_1, a_2)$, найденную П. П. Куфаревым и А. Э. Фалесом [5].

Следствие. *Для функций* $f_k(\zeta)$, $f_k(0)=a_k$ $(k=1, 2)$, *из* $P_R(a_1, a_2)$ *имеет место точное неравенство*

$$\ln\frac{R|f'(0)|}{R^2-|a_1|^2}\ln\frac{R|f_2'(0)|}{R^2-|a_2|^2}\geqslant\ln^2\frac{R|a_2-a_1|}{|R^2-\bar{a}_1a_2|}.$$

Легко может быть найдена область $\mathcal{E}(0, a, \infty)$, а следовательно, и $E(a_1, a_2, a_3)$.

Поступило
15 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Тр. Физ.-матем. инст. им. В. А. Стеклова, **5**, 159 (1934). [2] Г. М. Голузин, Матем. сборн., **23** (71), № 2, 455 (1951). [3] Л. И. Колбина, ДАН, **84**, № 5, 865 (1952). [4] П. П. Куфарев, ДАН, **73**, № 5, 881 (1950). [5] П. П. Куфарев, А. Э. Фалес, ДАН, **81**, № 6, 991 (1951).