Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

МАТЕМАТИКА

П. И. КОВАЛЬ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 IV 1955)

И. М. Рапопорт (1) исследовал асимптотическое поведение решений систем линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами, исходя из различных предположений относительно свойств этих коэффициентов. Как мы показываем ниже, вопрос об устойчивости решений систем линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами может быть решен при более общих предположениях относительно коэффициентов этих уравнений.

Систему n линейных разностных уравнений первого порядка будем записывать в векторно-матричной форме

$$x_{s+1} = A_s x_s + b_s, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\{x_s\}$ — искомая последовательность векторов; $\{A_s\}$ — заданная последовательность матриц и $\{b_s\}$ — заданная последовательность векторов.

Решения системы (1) асимптотически устойчивы, если для любого частного решения x_s соответствующей однородной системы $\lim\limits_{s\to\infty} \| x_s \| = 0$; устойчивы по Ляпунову, если для любого частного решения однородной системы $\| x_s \| \leqslant c < \infty$, и неустойчивы, если существует частное решение однородной системы, у которого $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \| x_s \| = \infty$. В приведенных ниже теоремах мы указываем некоторые критерии устойчивости и неустойчивости решений системы (1).

Теорема 1. *Если существует предельная матрица* $A = \lim\limits_{s\to\infty} A_s$ *и все ее собственные числа по модулю меньше единицы, то решения системы* (1) *асимптотически устойчивы.*

Доказательство *. Полагая $A = \tilde{A} + \delta$, можно всегда при сколь угодно малой норме матрицы δ выбрать эту матрицу таким образом, чтобы собственные числа матрицы $\tilde{A}$ были простые и по модулю не превосходили $q < 1$. Начиная с достаточно большого значения $s = s_0$, собственные числа матрицы $\tilde{A}_s = A_s - \delta$ будут простые и по модулю меньше $\frac{1}{2}(1+q) < 1$. Матрицам $\tilde{A}_s$ можно поставить в соответствие диагональные матрицы W_s и неособенные по норме равномерно ограниченные матрицы T_s, для которых $\tilde{A}_s T_s = T_s W_s$. Подстановка $x_s = T_s y_s$ преобразует однородную систему, соответствующую системе (1), к виду

$$y_{s+1} = (W_s + B_s) y_s, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

* В случае, когда $\{A_s\}$ — последовательность неособенных матриц, теоремы 1 и 2 могут быть получены из теоремы Перрона (2) (теорема 13, стр. 62—63).

где $B_s = T_{s+1}^{-1}(T_s - T_{s+1})\,W_s + T_{s+1}^{-1}\delta T_s$. Очевидно, $\|W_s\| < {}^1/_2(1+q) < 1$, матрицу δ можно взять столь малой по норме, чтобы имело место неравенство $\|T_{s+1}^{-1}\delta T_s\| < {}^1/_8(1-q)$, и s_0' можно взять столь большим, чтобы при $s \geqslant s_0$ выполнялось условие $\|T_{s+1}^{-1}(T_s - T_{s+1})\,W_s\| < {}^1/_8(1-q)$. Таким образом, при надлежащем выборе матрицы δ и $s \geqslant s_0$, где $s_0 = \max(s_0', s_0'')$, будет выполняться неравенство $\|W_s + B_s\| < {}^1/_4(3+q) < 1$. Решая систему (2), получим $\|y_s\| \leqslant \|y_{s_0}\|\,[{}^1/_4(3+q)]^{s-s_0}$. Отсюда $\lim\limits_{s\to\infty}\|x_s\| = \lim\limits_{s\to\infty}\|T_s y_s\| = 0$, чем и доказывается теорема 1.

Теорема 2. *Если существует предельная матрица* $A = \lim\limits_{s\to\infty} A_s$ *и среди ее собственных чисел хотя бы одно превосходит по модулю единицу, то решения системы* (1) *неустойчивы.*

Доказательство. Полагая $A = \tilde{A} + \delta$, можно всегда при сколь угодно малой норме матрицы δ выбрать эту матрицу таким образом, чтобы все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\tilde{A}$ были простыми. При соответствующей их нумерации будем иметь: $|\lambda_1| > |\lambda_k|$, $k = 2, 3, \ldots, n$, и $|\lambda_1| > 1$. Начиная с достаточно большого значения $s = s_0'$, все собственные числа $\lambda_{1,s}, \lambda_{2,s}, \ldots, \lambda_{n,s}$ матрицы $\tilde{A}_s = A_s - \delta$ будут простыми и будут иметь место неравенства: $|\lambda_{1,s}| > |\lambda_{k,s}|$, $k = 2, 3, \ldots, n$, и $|\lambda_{1,s}| > 1$. Применив ту же, что и выше, подстановку, придем к системе (2). Введем обозначения $\inf\limits_{s\geqslant s_0'}|\lambda_{1,s}| = \beta$ и $\sup\limits_{s\geqslant s_0',\ 2\leqslant k\leqslant n}|\lambda_{k,s}| = \alpha$. Очевидно, что $\beta > \alpha$ и $\beta > 1$. Если $0 < \varepsilon < \{{}^1/_2(\beta-1), {}^1/_2(\beta-\alpha)\}$, то при достаточно малой норме матрицы δ и достаточно большом $s \geqslant s_0'$ будет выполняться неравенство $\|B_s\| < \varepsilon$ при $s \geqslant s_0''$. Если положить $s_0 = \max(s_0', s_0'')$ и задать $|y_{1,s_0}| = \theta > |y_{k,s_0}|$, $k = 2, 3, \ldots, n$, то $|y_{1,s_0+1}| > \theta(\beta-\varepsilon) > \{{}^1/_2\theta(\beta+1),\ {}^1/_2\theta(\beta+\alpha)\}$ и $|y_{k,s_0+1}| < \theta(\alpha+\varepsilon) < |y_{1,s_0+1}|$, $k = 2, 3, \ldots, n$. Отсюда следует $|y_{1,s}| > \theta\,[{}^1/_2(\beta+1)]^{s-s_0}$, $s = s_0+1$, $s_0+2, \ldots$, $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\|y_s\| = \infty$ и $\lim\limits_{s\to\infty}\|x_s\| = \infty$, что и доказывает теорему 2.

Теорема 3. *Если* $\sum\limits_{s=s_0}^{\infty}\|A_{s+1} - A_s\| < \infty$ *и если предельная матрица* $A = \lim\limits_{s\to\infty} A_s$ *не имеет кратных собственных чисел и собственные числа матриц* A_s *по модулю не превосходят* $1 + q_s$, *где* $q_s \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{s=s_0}^{\infty} q_s < \infty$, *то решения системы* (1) *устойчивы по Ляпунову.*

Доказательство. Начиная с достаточно большого значения s_0, собственные числа матриц A_s $(s \geqslant s_0)$ будут простыми. Снова применив ту же, что и выше, подстановку, придем к системе (2), в которой $\|W_s\| \leqslant 1 - q_s$, $B_s = T_{s+1}^{-1}(T_s - T_{s+1})\,W_s$ и $\sum\limits_{s=s_0}^{\infty}(q_s + \|B_s\|) < \infty$.

Следовательно, $\|y_s\| < \|y_{s_0}\| \prod\limits_{r=s_0}^{\infty}(1 + q_r + \|B_r\|)$ и $\|x_s\| = \|T_s y_s\| \leqslant$ $\leqslant c < \infty$, а это и доказывает теорему 3.

Применение метода сеток к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных часто приводит к системе разностных уравнений второго порядка:

$$z_{s+1} - 2z_s + z_{s-1} = P_s z_s + Q_s, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Решения системы (3) устойчивы по Ляпунову, если частные решения соответствующей однородной системы по норме равномерно ограничены. Ниже в теореме 4 мы указываем достаточные критерии устойчивости по Ляпунову решений системы (3).

Теорема 4. *Если* $\sum_{s=s_0}^{\infty} \| P_{s+1} - P_s \| < \infty$ *и собственные числа* λ_p, $p = 1, 2, \ldots, n$, *предельной матрицы* $P = \lim_{s \to \infty} P_s$ *простые и удовлетворяют неравенствам*

$$-4 < \lambda_p < 0, \tag{4}$$

то решения системы (3) *устойчивы по Ляпунову.*

Доказательство. Применяя к однородной системе, соответствующей системе (3), подстановку $z_s - z_{s-1} = t_{s-1}$, получим систему

$$u_s = M_s u_{s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

где $z_{i,s} = u_{i,s}$, $t_{i,s} = u_{n+i,s}$ и $M_s = \left\| \begin{array}{c|c} E & E \\ \hline P_s & P_s + E \end{array} \right\|$.

Матрица M_s удовлетворяет условиям $\sum_{s=s_0}^{\infty} \| M_{s+1} - M_s \| < \infty$ и $\det M_s = 1$. Если обозначить через $\eta_{q,s}$, $q = 1, 2, \ldots, 2n$, собственные числа матрицы M_s, то $\lambda_{p,s} = 2\,\mathrm{Re}(\eta_{q,s}) - 2$ и $\eta_{q,s}^2 - (2 + \lambda_{p,s})\eta_{q,s} + 1 = 0$, где $\mathrm{Re}(\eta_{q,s})$ — действительная часть, в общем случае, комплексного числа $\eta_{q,s}$.

Отсюда и из неравенств (4) следует, что при достаточно большом значении s_0 $|\eta_{q,s}| = 1$, $q = 1, 2, \ldots, 2n$ и $s \geqslant s_0$.

Таким образом, в силу теоремы 3, решение системы (5), а следовательно и однородной системы, соответствующей системе (3), равномерно ограничены по норме, что и требовалось доказать.

Киевский государственный педагогический институт
им. А. М. Горького

Поступило
25 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд. АН УССР, 1954, стр. 58—63. [2] O. Perron, J. f. reine u. angew. Math., 161, 41 (1929).