Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. И. КАМЫНИН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В КЛАССЕ БЫСТРО РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 IV 1955)

Настоящая заметка является продолжением работ автора ([1-4]) по вопросу единственности решения задачи Коши для бесконечных систем уравнений вида

$$\frac{du(x,t)}{dt} = f(x,t;u(x+h_{-k},t),\ldots,u(x+h_k,t)), \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad (a)$$
$$-\infty < x < +\infty, \quad |t| \leqslant T.$$

Если раньше были указаны классы допустимых функций, обеспечивающих единственность решения задачи Коши (a) при условии, что f ограничено по x, то теперь рассматривается единственность для систем, правые части которых могут расти по x. Оказалось, что если правые части растут по x не быстрее $|x|^{1-\delta}$, то единственность решения задачи Коши (a) обеспечена в классе функций

$$|u(x,t)| \leqslant A \exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{|x|}{H}\ln(1+|x|)\right\}, \quad H=\max_{|\alpha|\leqslant k}|h_\alpha|, \quad |t|\leqslant T,$$

причем ε и δ связаны неравенствами $\delta > 1-\varepsilon \geqslant 0$. При этом показано, что нельзя при фиксированном δ расширить класс допустимых функций заменой $1-\varepsilon$ на $1+\varepsilon$, а при фиксированном ε нельзя ослабить ограничение на рост f по x заменой соотношения $\delta > 1-\varepsilon$ на $\delta < 1-\varepsilon$.

Теорема. *Рассмотрим систему*

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \sum_{\alpha=-k}^{k} C_\alpha(x,t)\,u(x+h_\alpha,t) + f(x,t), \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad (1)$$
$$-\infty < x < +\infty, \quad |t| \leqslant T,$$

где $C_\alpha(x,t)$, $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ определены для всех x и непрерывны по t. Пусть

$$C(x) = \max_{\substack{|\alpha|\leqslant k\\ |t|\leqslant T}} |C_\alpha(x,t)|, \quad H=\max_{|\alpha|\leqslant k}|h_\alpha|.$$

Если выполнены условия

$$C(x) \leqslant A|x|^{1-\delta}, \quad |f(x,t)| \leqslant B\exp\{(1-\varepsilon)\frac{|x|}{H}\ln(1+|x|)\}, \quad |t|\leqslant T,$$

$$|\varphi(x)| \leqslant B\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{|x|}{H}\ln(1+|x|)\right\}, \quad (2)$$

где $1 \geqslant \delta > 1 - \varepsilon \geqslant 0$ (ε *и* δ *постоянные*), *то существует решение задачи Коши* (1) *единственное в классе функций*

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{(1-\varepsilon)\frac{|x|}{H} \ln(1+|x|)\}, \quad |t| \leqslant T. \tag{3}$$

Если класс допустимых функций (3) *при фиксированном* δ ($1 \geqslant \delta > 1 - \varepsilon \geqslant 0$) *расширить условием*

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{(1+\varepsilon)\frac{|x|}{H} \ln(1+|x|)\}, \quad |t| \leqslant T, \tag{4}$$

то решение задачи Коши (1) *не будет, вообще говоря, единственным в классе* (4).

Если ослабить требование (2), *ограничивающее рост* $C(x)$, *заменив его условием*

$$C(x) \leqslant A|x|^{1-\delta}, \tag{5}$$

где $\delta < 1 - \varepsilon$, *то решение задачи Коши не будет, вообще говоря, единственным даже в классе* (3).

Доказательство. Заменив (1) интегральным уравнением

$$u(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t \Big\{ \sum_{\alpha=-k}^{k} C_\alpha(x, \tau) u(x + h_\alpha, \tau) + f(x, \tau) \Big\} d\tau, \tag{6}$$

ищем решение (6) методом последовательных приближений, беря за «нулевое» приближение $u^{(0)}(x, t) \equiv \varphi(x)$. Легко получить оценку

$$|u^{(l+1)}(x, t) - u^{(l)}(x, t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^{l+1}(|x| + lH)^{(l+1)(1+\delta)} \exp\left\{(1-\varepsilon)\left(\frac{|x|}{H} + l + 1\right) \ln(1 + |x| + (l+1)H)\right\} t^{l+1}}{(l+1)!},$$

где $L = AB(2k+1)$, откуда

$$|u^{(l+1)}(x, t) - u^{(l)}(x, t)| \leqslant t^{l+1} \exp\{-(l+1)(\delta + \varepsilon - 1) \ln(l+1)\} \tag{7}$$

при достаточно большом $l > L^*(|x|, \varepsilon, \delta, H, L)$.

Из (7) следует (см. [2]) как существование, так и единственность решения задачи Коши (1) в классе функций (3). Неединственность решения задачи Коши (1) в классе функций (4) следует из нашей работы [1], если положить $\delta = 1$. Справедливость утверждения теоремы о невозможности ослабления ограничения на рост $C(x)$ (5) доказывает следующий пример.

Система

$$\frac{du_n(t)}{dt} = 0, \quad n = 0, -1, -2, \ldots; \qquad \frac{du_n(t)}{dt} = n^{1-\delta} u_{n+k}(t), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где $\delta < 1 - \varepsilon$, с нулевыми начальными данными

$$u_n(0) = 0, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

имеет нетождественно равное нулю решение $v_n(t)$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$

$$v_n(t) \equiv 0, \quad n = 0, -1, -2, \ldots; \qquad v_1(t) = F(t);$$

$$v_n(t) \equiv 0, \quad n = 2, 3, \ldots, k;$$

$$v_{n+1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \not\equiv 0 \bmod k; \\ \dfrac{F^{(n/k)}(t) \exp\left\{-\dfrac{n}{k}(1-\delta)\ln k\right\}}{\left[\left(\dfrac{n}{k}\right)!\right]^{1-\delta}}, & \text{если } n \equiv 0 \bmod k, \end{cases}$$

если $F(t) \not\equiv 0$; $F^{(\nu)}(0) = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и $|F^{(\nu)}(t)| \leqslant [(1+\varepsilon_1)\nu]!$, $\varepsilon_1 > 0$ (такие функции существуют ([5])). При этом

$$|v_n(t)| \leqslant \frac{\exp\left\{(1+\varepsilon_1)\dfrac{|n|}{k}\ln\left(1+\dfrac{|n|}{k}\right) - \dfrac{|n|}{k}(1-\delta)\ln k\right\}}{\left(\left[\dfrac{|n|}{k}\right]!\right)^{1-\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{(\delta + \varepsilon_1 + \alpha)\frac{|n|}{k}\ln(1+|n|)\} \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)\frac{|n|}{k}\ln(1+|n|)\},$$

если только $\delta + \varepsilon_1 + \alpha < 1 - \varepsilon$, т. е. $\varepsilon_1 + \alpha_1 < 1 - \varepsilon - \delta$. Такой выбор $\varepsilon_1 > 0$ и $\alpha > 0$ всегда возможен в силу условия $\delta < 1 - \varepsilon$. Таким образом, решение $v_n(t)$ принадлежит классу (3).

Замечание 1. Примененный метод доказательства позволяет непосредственно обобщить теорему существования и единственности решения задачи Коши на случай системы уравнений

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x, t; u(x+h_{-k}, t), \ldots, u(x+h_k, t)), \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad |t| \leqslant T, \tag{10}$$

если только функция f удовлетворяет условиям:

1) $f(x, t; u_{-k}, \ldots, u_k)$ определена при любых u_m $(m = -k, \ldots, k)$ и $|t| \leqslant T$, $-\infty < x < +\infty$;

2) $f(x, t; u_{-k}, \ldots, u_k)$ измерима по t для любых фиксированных u_m $(m = -k, \ldots, k)$ и x, причем

$$\int_0^t |f(x, \tau; 0, \ldots, 0)|\, d\tau \leqslant A \exp\{(1-\varepsilon)\frac{|x|}{H}\ln(1+|x|)\}, \quad |t| \leqslant T;$$

3) $f(x, t; u_{-k}, \ldots, u_k)$ удовлетворяет по u_m условию Липшица

$$|f(x, t; u''_{-k}, \ldots, u''_k) - f(x, t; u'_{-k}, \ldots, u'_k)| \leqslant C(x) \sum_{\alpha=-k}^{k} |u''_\alpha - u'_\alpha|$$

для всех $|t| \leqslant T$ и $|x| < \infty$, причем $0 \leqslant C(x) \leqslant B|x|^{1-\delta}$, где $1 \geqslant \delta > 1 - \varepsilon \geqslant 0$.

При этом решение задачи Коши (10) единственно в классе функций (3), если только $\varphi(x)$ принадлежит классу (3).

Не представляет труда перенос этого результата на случай векторов $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$ и вектор-функций f.

Замечание 2. Для бесконечной системы

$$\frac{du_n(t)}{dt} = \sum_{\alpha=-k}^{k} C_\alpha u_{n+\alpha}(t), \quad u_n(0) = u_n^0, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

встречающейся в теории процессов Маркова со счетным числом состояний, полученное нами условие единственности (2) в частном случае $\varepsilon \leqslant 1$ (т. е. в классе ограниченных функций) содержится в условии регулярности марковских процессов Р. Л. Добрушина ([6]).

Замечание 3. Если $\delta = 1$, то результаты, содержащиеся в замечании 1, совпадают с полученным ранее автором ([1, 2]) условием (3) единственности решения задачи Коши для системы (10) с ограниченными по x правыми частями.

Замечание 4. Рассмотренные системы (1) встречаются при решении методом конечных разностей задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t\right) u(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{12}$$

В связи с этим интересно отметить, что с измельчением шага сетки ($H \to 0$) класс допустимых функций, в которых решение задачи Коши для соответствующего (12) разностного аналога

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{\alpha=-k}^{k} C_\alpha(x, t; h_{-k}, \ldots, h_k) u(x + h_\alpha, t), \quad |C_\alpha(x, t, h)| \leqslant B |x|^{1-\delta}$$

единственно, расширяется, как это следует из уравнения единственности (3). Однако для фиксированного обобщенного шага $(h_{-k}, \ldots, h_k)$ решение задачи Коши уже неединственно в классе (4).

Замечание 5. В заметке Б. Л. Гуревича ([7]) делается интересная попытка применения методов И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, развитых в статье ([8]), в вопросе о единственности решения задачи Коши для конечноразностного уравнения с независящими от x правыми частями вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{\alpha=-k}^{k} C_\alpha(t) u(x + h_\alpha, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{13}$$

Теорема, сформулированная Б. Л. Гуревичем, устанавливает единственность решения задачи Коши (13) в классе допустимых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|u(x, t)| \leqslant A \exp\{\gamma |x| \ln(1 + |x|)\}, \quad |t| \leqslant T, \tag{14}$$

которое должно выполняться для всех как угодно малых $\gamma > 0$. Отметим, что в силу замечания 3 результат Б. Л. Гуревича, дающий достаточное условие единственности (14), не нов. Кроме того, по существу, условие (14) Б. Л. Гуревича более узко, чем (3) (где $\delta = 1$). В (14) нельзя фиксировать γ, так как для достаточно большого H, ввиду (4) ($\delta = 1$) (см. ([1, 4])), единственности решения задачи Коши (13) не будет. Отметим еще, что в силу замечания 4 при фиксированном γ в (14) можно путем измельчения сетки ($H \to 0$) добиться выполнения неравенства $\gamma < \frac{1-\varepsilon}{H}$, после чего из наших результатов следует единственность решения задачи Коши для нового шага H в классе (14) с данным γ.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Камынин, ДАН, 82, № 1 (1952). [2] Л. И. Камынин, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 2 (1953). [3] Л. И. Камынин, ДАН, 93, № 3 (1953). [4] Л. И. Камынин, ДАН, 95, № 1 (1954). [5] А. Н. Тихонов, Матем сборн., 42, № 2, 215 (1935). [6] Р. Л. Добрушин, Усп. матем. наук, 7, в. 6 (52) (1952). [7] Б. Л. Гуревич, ДАН, 99, № 6 (1954). [8] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 8, в. 6 (58) (1953).