Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

МАТЕМАТИКА

Р. Э. ВИНОГРАД

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МЛАДШЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПРАВИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 IV 1955)

В работах автора ([1], [2]) было показано, что старший (наибольший) характеристический показатель правильной системы, вообще говоря, не является устойчивым по отношению к равномерно малым на всей полуоси (и даже быстро затухающим ([2])) изменениям коэффициентов системы. Впоследствии Б. Ф. Былов ([3]) нашел необходимые и достаточные условия, при которых наблюдается такое явление. В настоящей заметке доказывается одновременная неустойчивость старшего и младшего (наименьшего) характеристических показателей правильной системы при тех же условиях. Рассуждение проводится применительно к обозначениям и результатам работы ([1]).

В работе ([1]) рассматривались «невозмущенная» система

$$x' = 0, \quad y' = f(t)\,y \tag{1}$$

и «возмущенная» система

$$x' = \delta y, \quad y' = \delta x + f(t)\,y, \tag{2}$$

где $\delta = \text{const} > 0$. В качестве $f(t)$ берется

$$f(t) = \begin{cases} -1 \text{ при } (2n)^2 \leqslant t < (2n+1)^2, \\ \ \ 1 \text{ при } (2n+1)^2 \leqslant t < (2n+2)^2, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

благодаря чему $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(\xi)\,d\xi$ существует и равен нулю, так что система (1) правильна и имеет характеристические показатели 0 и 0. Далее устанавливается, что решение $X(t) = \{x(t);\ y(t)\}$ системы (2) с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ имеет вид

$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{2k} I_k(t), \tag{3}$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{2k-1} J_k(t), \tag{4}$$

где положено

$$I_k(t) = \int_0^t \int_0^{t_{2k-1}} \int_0^{t_{2k-2}} \int_0^{t_{2k-3}} \cdots \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \exp\left[\int_{t_0}^{t_1} f(\xi)\,d\xi + \int_{t_1}^{t_2} f\,d\xi + \ldots + \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f\,d\xi\right] \times$$
$$\times\, dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k-1}, \tag{5}$$

$$J_k(t) = \int_0^t \int_0^{t_{2k-2}} \int_0^{t_{2k-3}} \cdots \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \exp\left[\int_{t_0}^{t_1} f\,d\xi + \int_{t_1}^{t_2} f\,d\xi + \ldots + \int_{t_{2k-4}}^{t_{2k-3}} f\,d\xi + \int_{t_{2k-2}}^{t} f\,d\xi\right] \times$$
$$\times\, dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k-2} \tag{6}$$

и доказывается неравенство

$$I_n(T) \geqslant e^{2n^2-n} \quad \text{при } T=(2n)^2, \tag{7}$$

из которого следует основной результат:

$$\text{характерист. показатель } \overline{X}(t) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| \overline{X}(t) \| \geqslant \frac{1}{2}, \tag{8}$$

показывающий, что при переходе от системы (1) к «возмущенной» системе (2) со сколь угодно малым $\delta > 0$ старший характеристический показатель претерпевает скачок на величину $\geqslant 1/2$.

Для исследования младшего показателя установим предварительно оценки, более точные, чем (8), а именно:

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| \overline{X}(t) \| \geqslant \frac{1}{2}, \tag{9}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| \overline{X}(t) \| \leqslant \frac{1}{2} + \delta. \tag{10}$$

Возьмем произвольное t и подберем n так, чтобы было $(2n)^2 \leqslant t < (2n+1)^2$. Так как члены ряда (3) все положительны, а интеграл (5) убывает вместе с t, то, принимая во внимание (7), имеем

$$\| \overline{X}(t) \| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \geqslant x(t) > \delta^{2n} I_n(t) \geqslant \delta^{2n} I_n(T) > \delta^{2n} e^{2n^2-n},$$

откуда

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| \overline{X}(t) \| \geqslant \lim_{t\to\infty} \frac{2n \ln \delta + 2n^2 - n}{t} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2n \ln \delta + 2n^2 - n}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2},$$

и (9) доказано.

Перейдем к (10). Положим

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } (2n)^2 \leqslant t < (2n+1)^2, \\ 1 & \text{при } (2n+1)^2 \leqslant t < (2n+2)^2. \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как $F(t) \geqslant 0$, то для любых непересекающихся отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$, лежащих внутри $[0, t]$, будет $\sum \int_{\Delta_r} F(\xi)\, d\xi \leqslant \int_0^t F(\xi)\, d\xi$, а так как, кроме того, $F(t) \geqslant f(t)$, то, каковы бы ни были $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \ldots \leqslant t_{2k-1} \leqslant t$, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} f\, d\xi + \int_{t_2}^{t_3} f\, d\xi + \ldots + \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} f\, d\xi \leqslant \int_{t_0}^{t_1} F\, d\xi + \int_{t_2}^{t_3} F\, d\xi + \ldots + \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} F\, d\xi \leqslant \int_0^t F\, d\xi.$$

Поэтому интегралы (5) и (6) допускают оценки

$$I_k(t) \leqslant \int_0^t \int_0^{t_{2k-1}} \ldots \int_0^{t_1} e^{\int_0^t F\, d\xi}\, dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k-1} = e^{\int_0^t F\, d\xi} \frac{t^{2k}}{(2k)!},$$

$$J_k(t) \leqslant \int_0^t \int_0^{t_{2k-2}} \ldots \int_0^{t_1} e^{\int_0^t F\, d\xi}\, dt_0 dt_1 \ldots dt_{2k-2} = e^{\int_0^t F\, d\xi} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

откуда (величины (3) и (4) неотрицательны)

$$\|\overline{X}(t)\| \leqslant x(t) + y(t) \leqslant 1 + e^{\int_0^t F\,d\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta^{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \delta^{2k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] \leqslant e^{\int_0^t F\,d\xi} e^{\delta t}. \tag{11}$$

Покажем, что $\int_0^t F\,d\xi \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{2}$. Согласно определению $F(t)$ имеем

$$\int_0^{(2n)^2} F\,d\xi = \sum_{r=1}^{n} \int_{(2r-1)^2}^{(2r)^2} 1 \cdot d\xi = \sum_{r=1}^{n} (4r-1) = 2n(n+1) - n = \frac{(2n)^2 + (2n)}{2},$$

иначе говоря, функции $\frac{t+\sqrt{t}}{2}$ и $\int_0^t F\,d\xi$ совпадают, когда t есть целый четный квадрат. Внутри отрезка $[(2n)^2;\ (2n+2)^2]$ первая функция выпукла, а вторая нет, ибо $\frac{d^2}{dt^2} \frac{t+\sqrt{t}}{2} = -\frac{1}{8\sqrt{t^3}} < 0$, а $\int_0^t F\,d\xi$ постоянна на отрезке $[(2n)^2,\ (2n+1)^2]$ и линейно возрастает при изменении t от $(2n+1)^2$ до $(2n+2)^2$. Так как на концах отрезка обе функции совпадают, то $\int_0^t F\,d\xi \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{2}$ при всех t.

Возвращаясь к (11), получаем

$$\|\overline{X}(t)\| \leqslant e^{\frac{t+\sqrt{t}}{2} + \delta t} = e^{\left(\frac{1}{2} + \delta\right)t + \frac{\sqrt{t}}{2}},$$

откуда и следует (10).

Теперь приведем систему (2) унитарным преобразованием к треугольному виду по способу, изложенному в [4]. Для этого нужно выбрать какую-либо фундаментальную систему решений (2). В качестве первого решения возьмем $\overline{X}(t)$, а в качестве второго — любое решение, линейно независимое с $\overline{X}(t)$. Осуществляя после этого преобразование, получим систему

$$u' = p_{11}(t)\,u + p_{12}(t)\,v, \quad v' = p_{22}(t)\,v \tag{12}$$

(u, v — новые искомые функции). Как показано в [4], коэффициенты $p_{ij}(t)$ ограничены, причем выполняются равенства

$$\int_0^t p_{11}(\xi)\,d\xi = \ln \|\overline{X}(t)\|, \tag{13}$$

$$p_{11}(t) + p_{22}(t) = f(t). \tag{14}$$

Из (13), (9) и (10) следует

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t p_{11}\,d\xi \geqslant \frac{1}{2} \tag{15}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t p_{11}\,d\xi \leqslant \frac{1}{2} + \delta, \tag{16}$$

а (14), согласно определению $f(t)$, дает

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t (p_{11}+p_{22})\,d\xi = 0. \tag{17}$$

Поскольку вообще из существования $\lim(a+b)$ вытекает

$$\lim(a+b) = \underline{\lim}\, a + \overline{\lim}\, b = \overline{\lim}\, a + \underline{\lim}\, b \tag{18}$$

(если все пределы конечны), то, полагая $a = \frac{1}{t}\int_0^t p_{11}d\xi$, $b = \frac{1}{t}\int_0^t p_{22}d\xi$ и принимая во внимание (17), (15) и (16), получаем:

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t p_{22}d\xi = -\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t p_{11}d\xi \geqslant -\left(\frac{1}{2}+\delta\right), \tag{19}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t p_{22}d\xi = -\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t p_{11}d\xi \leqslant -\frac{1}{2}. \tag{20}$$

Из (18) следует, в частности, что $\overline{\lim}(-a) = -\underline{\lim}(a)$, поэтому (15) можно записать в виде $\overline{\lim_{t\to\infty}}\left(-\frac{1}{t}\int_0^t p_{11}\,d\xi\right)\leqslant -\frac{1}{2}$, а тогда, используя (19), находим

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t (p_{22}-p_{11})\,d\xi \leqslant \overline{\lim}\, b + \overline{\lim}(-a) \leqslant -\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right) = -1. \tag{21}$$

Перейдем к исследованию характеристических показателей системы (12), которые совпадают, в силу унитарности преобразования, с показателями системы (2).

Рассмотрим решение

$$u = -e^{\int_0^t p_{11}d\xi}\int_t^\infty p_{12}(\tau)\,e^{\int_0^\tau (p_{22}-p_{11})\,d\xi}\,d\tau, \quad v = e^{\int_0^t p_{22}d\xi}. \tag{22}$$

Указанный выбор пределов интегрирования для u возможен, так как p_{12} ограничена, а потому, в силу (20), подинтегральная функция имеет характеристический показатель $\leqslant -1$, и интеграл сходится. Более того, по известной лемме Ляпунова, характеристический показатель этого интеграла также $\leqslant -1$. В таком случае, принимая во внимание еще (16), мы видим, что характеристический показатель u не превосходит $(1/2+\delta)-1 = -1/2+\delta$.

Так как, согласно (19), характеристический показатель v не более $-1/2$, то окончательно решение (22) имеет характеристический показатель $\leqslant -1/2+\delta$. Итак, у системы (12), а значит и у системы (2) найдено решение с показателем $\leqslant -1/2+\delta$, а ранее было построено решение $\overline{X}(t)$ с показателем $\geqslant 1/2$.

Таким образом, при переходе от «невозмущенной» системы (1) к «возмущенной» системе (2) с любым достаточно малым $\delta > 0$ оба характеристических показателя испытывают конечные скачки: старший — в положительном, младший — в отрицательном направлениях.

Тульский горный
институт

Поступило
15 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Э. Виноград, Прикл. матем. и мех., **17**, в. 6 (1953). [2] Р. Э. Виноград, ДАН, **91**, № 5 (1953). [3] Б. Ф. Былов, Канд. дисс., 1954. [4] Р. Э. Виноград, Усп. матем. наук, **9**, в. 2 (60) (1954).