Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. БОРИСОВ

ГЕОМЕТРИЯ ПОЛУОКРЕСТНОСТИ КРИВОЙ В ДВУМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 IV 1955)

Понятие двумерного многообразия ограниченной кривизны определено в (1). В настоящей заметке рассматриваются геометрические свойства полуокрестности кривой в таком многообразии. Основной результат состоит в том, что «в бесконечно малом» геометрия полуокрестности кривой такая же, как для плоской кривой, у которой поворот (2) задается той же самой функцией длины. В частности, это относится к выражениям для вариации длины и площади. В применении к изопериметрической задаче это дает результат, вполне аналогичный известному для регулярных поверхностей. Представляется интересным тот факт, что в случае, когда ни одна кривая с поворотом ограниченной вариации не может иметь отрицательной кривизны, нерегулярность метрики вообще не влияет на результат, а именно, замкнутая кривая, ограничивающая при заданной длине наибольшую площадь, имеет в точности постоянную геодезическую кривизну (в общем случае этот результат не имеет места, что обнаруживается на примере). Доказательство этих результатов основано на введении в полуокрестности кривой некоторого аналога полугеодезических координат. Ниже приводятся точные формулировки.

Пусть L — кривая в двумерном многообразии ограниченной кривизны, гомеоморфная отрезку и имеющая поворот ограниченной вариации (2). Дополнительно предполагается, что в каждой точке M кривой L поворот меньше π (отсутствуют «точки возврата»), а кривизны концов A и B меньше 2π. Пусть AA_1, BB_1 — кратчайшие, не имеющие с L общих точек, кроме A и B (в силу сделанных предположений такие существуют). Соединим точки A_1, B_1 геодезической ломаной R так, чтобы L, AA_1, BB_1 и R вместе ограничивали топологический прямоугольник U_L (замкнутый), который назовем полуокрестностью кривой L. Зададимся произвольным числом $n \geqslant 0$ и пусть $L(n)$ — множество точек полуокрестности U_L, удаленных от L на расстояние n.

Теорема 1. *Существует такое число* $n_0 > 0$, *что*:

1) *при* $n \leqslant n_0$ *множество* $L(n)$ *является спрямляемой кривой с концами* $A_n \in AA_1$, $B_n \in BB_1$;

2) *если на каждой кривой* $L(n)$ *ввести в качестве параметра приведенную длину* t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, *отсчитываемую от* A_n, *то, сопоставляя каждой точке кривой* $L(n)$ $(0 \leqslant n \leqslant n_0)$, *отвечающей параметру* t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, *точку плоскости с декартовыми координатами* $x = t$, $y = n$, *получим топологическое отображение части* U_L *на прямоугольник* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant n_0$.

Таким образом, полуокрестность U_L содержит полуокрестность $U_L^{(n_0)}$ (ограниченную кривыми L, $L(n_0)$ и кратчайшими AA_{n_0}, BB_{n_0}), в которой указанным способом оказываются введенными координаты t, n $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant n \leqslant n_0)$.

Рассмотрим новое многообразие ограниченной кривизны F, обладающее такими свойствами:

1) в F проходит гомеоморфная отрезку кривая L' с концами A', B', у которой длина равна длине L и такая, что поворот дуги $\overset{\frown}{A'M'} \subset L'$ со стороны некоторой полуокрестности $U_{L'}$ кривой L' равен повороту дуги $\overset{\frown}{AM} \subset L$ со стороны U_L, как только равны длины этих дуг;

2) всякая область из F, не содержащая точек кривой L', локально изометрична плоскости.

При сделанных предположениях относительно L существование многообразия F легко доказывается. Наглядно $U_{L'}$ есть не что иное как плоская (вообще говоря, самоперекрывающаяся) лента, ограниченная кривой L', при этом в угловых точках L' с поворотом $\leqslant -\pi$ в нее дополнительно вклеиваются плоские секторы так, чтобы угол L' со стороны $U_{L'}$ достиг нужной величины. Полуокрестность $U_{L'}$ кривой L' в F играет роль евклидова пространства, соприкасающегося с U_L вдоль кривой L, как видно из теоремы 2.

Теорема 2. *Существует такое число $n_0 > 0$, что полуокрестность $U_L(n_0)$ допускает топологическое отображение φ на полуокрестность $U_{L'}(n_0)$ кривой L' (определяемую для L' так же, как и для L), при котором для всякой спрямляемой кривой K*

$$|s(K) - s[\varphi(K)]| < \varepsilon(n_K)\, s(K),$$

где n_K — наибольшее значение координаты n для точек K, $\varepsilon(n_K) \underset{n_K \to 0}{\longrightarrow} 0$, а $s(K)$ — длина кривой K.

Выбор параметра t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ на кривых $L(n)$ удается специализировать таким образом, что в новых координатах t, n (n имеет прежний смысл, а t остается приведенной длиной в общем случае лишь на самой кривой L) имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Если кривая K задана уравнением $n = n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $n(t)$ удовлетворяет условию Липшица, то кривые $K(\lambda)$ с уравнениями $n = \lambda n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, спрямляемы, их длина $s(\lambda)$ дифференцируема по λ при $\lambda = 0$ и справедлива формула:*

$$\left.\frac{ds}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_0^1 n(t)\, dg(t) + n(0) f(\alpha) + n(1) f(\beta),$$

причем интеграл берется в смысле Стилтьеса; α, β — углы кратчайших AA_1, BB_1 с L (измеренные в U_L), а функции g и f определены так:

$$g(t) = -\varphi(t) + \sum_{\tau_i > 1} \tau_i - \sum_{\tau_i > 0} 2 \operatorname{tg} \frac{\tau_i}{2},$$

где $\varphi(t)$ — поворот дуги L, отвечающей изменению параметра от 0 до t; τ_i — повороты L в угловых точках:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ x - \dfrac{\pi}{2} & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

В регулярном случае $g(t) = -\int_0^t \varkappa_g ds$ (где $\varkappa_g$ — геодезическая кривизна L; ds — дифференциал длины), и мы приходим к известному выражению для вариации длины.

Совершенно аналогично обстоит дело с выражением для вариации площади:

Теорема 4. *Если в условиях теоремы* 3 $\sigma(\lambda)$ — *площадь области, ограниченной кривыми* L, $K(\lambda)$ *и дугами кратчайших* AA_1, BB_1, *то функция* $\sigma(\lambda)$ *дифференцируема по* λ *при* $\lambda = 0$ *и*

$$\left.\frac{d\sigma}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = s(L)\int_0^1 n(t)\,dt.$$

Из теорем 3 и 4 вытекает:

Теорема 5. *Если спрямляемая кривая* L *ограничивает гомеоморфную кругу область* G *и все замкнутые кривые той же длины, достаточно близкие к* L, *ограничивают область с площадью, не большей площади* G, *то* L *обладает следующими свойствами:*

1) *поворот любой дуги* L, *а также повороты во всех ее угловых точках со стороны области* $\tilde{G}$, *внешней по отношению к* G, *неположительны;*

2) *если* $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{B_1B_2}$ — *дуги* L *одинаковой длины без общих внутренних точек, то их повороты* φ_G *и* $\varphi_{\tilde{G}}$ *со стороны областей* G *и* $\tilde{G}$ *связаны соотношением* $\varphi_G(\overset{\frown}{A_1A_2}) \leqslant -\varphi_{\tilde{G}}(\overset{\frown}{B_1B_2})$.

Если поворот кривой L есть дифференцируемая функция длины дуги, то производная поворота по длине называется геодезической кривизной L (с определенной стороны). Из теоремы 5 очевидным образом вытекает

Теорема 6. *Если в многообразии* R *всякая кривая с поворотом ограниченной вариации имеет неотрицательную кривизну, то всякая простая замкнутая кривая* L, *ограничивающая при данной длине область наибольшей площади (по сравнению с «соседними» положениями* L) *имеет постоянную геодезическую кривизну с обеих сторон, причем кривизны с разных сторон* L *равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

То, что условие, наложенное на многообразие R, существенно, показывает следующее рассуждение: рассмотрим тело, составленное из двух одинаковых усеченных конусов, приложенных меньшими основаниями; замкнутая кривая, лежащая в плоскости симметрии, очевидно, ограничивает область наибольшей площади, но может не иметь постоянной геодезической кривизны.

Теоремы 5 и 6 непосредственно переносятся на тот случай, когда часть контура, ограничивающего максимальную площадь, заранее фиксирована.

Из теоремы 6 и упомянутых ее обобщений вытекает существование в многообразиях с нерегулярной метрикой кривых постоянной геодезической кривизны, удовлетворяющих различным дополнительным условиям. Укажем, в частности, такую теорему:

Теорема 7. *В компактном многообразии ограниченной кривизны, подчиненном условию теоремы* 6, *для любого достаточно малого числа* $l > 0$ *существует простая замкнутая кривая длины* l, *имеющая постоянную геодезическую кривизну.*

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
27 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, 60, № 3 (1948). [2] А. Д. Александров, ДАН, 63, № 4 (1948).