Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

ГЕОФИЗИКА

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА МЕЛКОВОДЬЕ

В предыдущей работе (1) исследовано развитие ветровых волн на мелководном море в достаточном удалении от наветренного берега, т. е. в условиях постоянства потока энергии во всех точках вдоль пути волн. Сейчас рассмотрим общий случай развития ветровых волн на мелководье на каком угодно расстоянии от наветренного берега — вплоть до самых малых его значений.

Как было нами показано в (2), вблизи наветренного берега поток энергии волн, выходящий «вперед» из какого-то столба воды, оказывается больше, чем поток энергии, входящий в этот столб «сзади». Ввиду этого обстоятельства в расчете на единицу поверхности моря волны теряют мощность W_Φ, выражаемую формулой (2) статьи (2):

$$W_\Phi = -\frac{5}{2} s r^{3/2} \frac{\partial r}{\partial x},$$

где

$$s = \frac{\delta g^{3/2}}{V\pi} N^{-1/2}.$$

Следовательно, в самом общем виде уравнение баланса энергии волн (3) из статьи (1) должно быть записано так:

$$\delta g r \frac{\partial r}{\partial t} = Ar(V-c)^2 - qr^2 - \frac{\pi\sigma}{2}\,\delta\,\frac{g}{H} r^3 - \frac{5}{2V\pi}\delta g^{3/2} N^{1/2} r^{3/2}\,\frac{dr}{\partial x} \qquad (1)$$

или сокращенно

$$\frac{\partial r}{\partial t} = a - br - er^2 - fr^{1/2}\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad (2)$$

причем

$$a = \frac{A}{\delta g}(V-c)^2; \quad b = \frac{q}{\delta g}; \quad e = \frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{H}; \quad f = \frac{5}{2V\pi} N^{1/2} g^{1/2}. \qquad (3)$$

Здесь A — коэффициент, определенный на основании опытов в штормовом бассейне над волнами, нарастающими под действием ветра; δ — плотность воды; g — ускорение в поле тяжести; V — скорость ветра; c — фазовая скорость волн; q — коэффициент, характеризующий потери мощности волн на внутреннее турбулентное трение; σ — коэффициент с размерностью сек.$^{-1}$, характеризующий потери мощности на разрушение волн под действием мелководья; H — глубина моря, озера или другого исследуемого водоема; r — амплитуда (полувысота) волн; N — отношение высоты волн к их длине.

Введем в анализ вместо аргументов x, t и их функции r соответствующие безразмерные аргументы ξ, τ и их безразмерную функцию η, руководствуясь соотношениями:

$$x = \frac{5}{2^{1/4}\pi^{5/4}} \frac{\delta^{1/4}(gH)^{3/4}}{\sigma^{3/4}\Lambda^{1/2}A^{1/4}(V-c)^{1/2}}\xi;$$

$$t \approx \frac{\tau}{(V-c)\sqrt{\frac{\pi}{2}\sigma A\frac{g}{H}}}; \quad r \approx (V-c)\sqrt{\frac{2A}{\pi\sigma}\frac{H}{g}}\eta. \tag{4}$$

Тогда вместо (2) запишется простое уравнение:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = 1 - \beta\eta - \gamma\eta^2 - \eta^{1/2}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}, \tag{5}$$

в котором числовые коэффициенты β и γ легко выражаются через величины (3) причем $\beta + \eta = 1$.

Чрезвычайно важно, что при возрастании глубины H коэффициент β при η в (5) приближается к единице, а коэффициент γ при η^2 стремится

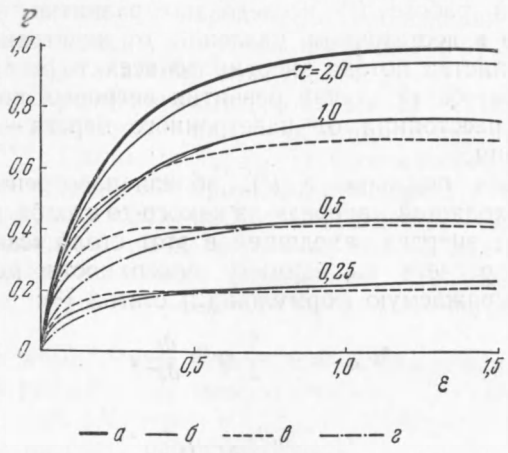


Рис. 1

к нулю. В соответствии с этим уравнение (5) в пределе стремится к уравнению поля ветровых волн на глубоком море, выведенному нами в работе (2).

Для примера положим $\beta = 0{,}57$ и $\gamma = 0{,}43$, соответственно некоторому частному случаю, и для этого случая найдем поле волн как в установившемся, так и в неустановившемся состоянии.

Если ветер работал очень долго и на всей мелководной акватории возникло установившееся волнение с амплитудами волн η, зависящими только от расстояния ξ, то можно положить в (5) $\partial\eta/\partial\tau = 0$. Тогда интеграл уравнения (5) с нулем в левой части запишется так:

$$\xi = 0{,}6\,\mathrm{Arth}\,\eta^{1/2} - 0{,}9\,\mathrm{artg}\,0{,}655\,\eta^{1/2}. \tag{6}$$

На рис. 1 кривая a представляет закон нарастания безразмерной амплитуды волн η по мере удаления от берега на безразмерное расстояние ξ при установившемся волнении на всем протяжении моря.

Остается лишь найти решение задачи в самой общей форме: охарактеризовать неустановившееся волнение на любом расстоянии ξ от наветренного берега через любой срок τ после начала работы ветра.

Точное значение интеграла лежит в промежутке между двумя значениями, которые легко определяются при интегрировании (5) двумя приближенными способами. Безусловно заниженное значение η получим, положив

$$\eta = F(\xi)\,\mathrm{th}\,\tau, \tag{7}$$

где через $F(\xi)$ обозначено выражение η как функция τ на основании кривой распределения установившегося волнения (рис. 1, кривая a). Только начальное условие (при $\tau = 0$ и $\xi = 0$) и условие в бесконечности (при $\tau = \infty$ и $\xi = 0$) автоматически удовлетворяются.

Значение η, завышенное на самых важных — начальных — этапах времени, получим, если положим

$$\eta = X \operatorname{th} \tau, \tag{8}$$

где X — функция от ξ, слабо зависящая от τ, и пренебрежем производной от X по τ при подстановке выражения (8) в левую часть (5).

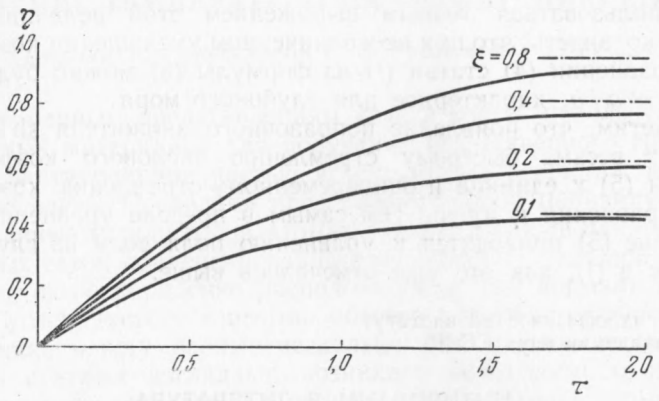


Рис. 2

Тогда, выразив в промежуточных выкладках $1/\operatorname{ch}^2\tau$ через квадрат $\operatorname{th}\tau$ и проделав простые преобразования, можно будет записать уравнение, интегрируемое в квадратурах:

$$1 - (1 + 0{,}570 - 0^2)\, X - 0{,}43\, 0^2 X^2 - 0^{1/2} X^{1/2} \frac{\partial X}{\partial \xi} = 0. \tag{9}$$

Здесь сокращенно обозначено $0 = \operatorname{th}\tau$.

Это уравнение отличается только коэффициентами от уравнения (5) с нулем в одной части. Следовательно, в результате его интегрирования должны получиться кривые, аналогичные кривой a на рис. 1, но только деформированные вследствие изменения масштабов. На рис. 1 для четырех значений τ (как параметра): 0,25; 0,5; 1,0 и 2,0 построены по две кривых. Кривые $в$ соответствуют заниженным значениям η согласно условию (7). Кривые $г$ соответствуют результатам интегрирования (9).

Истинные значения η даются кривыми $б$, проведенными между кривыми $в$ и $г$ на начальных этапах. Как видим, затем они очень близко подходят к кривым, построенным по (7), и в пределе с ними полностью сливаются. Эти кривые $б$ характеризуют поле волн на мелководье в неустановившемся состоянии.

Масштабы диаграммы попрежнему определяются формулами (4). Учет числовых значений различных величин, входящих в эти формулы, показывает, что при удалении от наветренного берега амплитуда волн на мелководье стремится к своему предельному значению быстрей, чем на глубоком море (разумеется, само предельное значение амплитуды волн на мелководье гораздо меньше «физически предельного», достижимого на глубоком море).

На основании диаграммы рис. 1 построена диаграмма рис. 2, которая показывает закон нарастания амплитуд волн во времени для четырех значений безразмерного расстояния ξ исследуемой точки от наветренного берега: $\xi = 0{,}1$; 0,2; 0,4; 0,8. На диаграмме указаны асимптоты, к кото-

рым стремятся все вычисленные кривые: они соответствуют установившемуся волнению.

Так же как и в работе [1], отметим, что при возрастании величины $\alpha = 2\pi H / \lambda$ сверх некоторого предела перестает соблюдаться соотношение (1) статьи [1] вследствие того, что $\mathrm{sh}\, 2\alpha / \alpha$ перестает равняться 2. В соответствии с этим масштабы расстояний увеличиваются в $(\mathrm{sh}\, 2\alpha / 2\alpha)^{3/4}$ раз, а масштабы времен и высот волн — в $(\mathrm{sh}\, 2\alpha / 2\alpha)^{1/2}$ раз, как это следует из уравнений (4), в которые приходится всюду вместо H подставлять $\frac{\mathrm{sh}\, 2\alpha}{2\alpha} H$. Кроме того, вместо приближенного выражения предельной амплитуды r_2 волн на мелководье, вошедшего в выражение (4) работы [1], потребуется пользоваться точным выражением этой величины (8) из [1]. Кстати, легко видеть, что при неограниченном уменьшении коэффициента c при r^2 в уравнении (4) статьи [1] из формулы (8) можно будет получить значение $r_2 = a / b$, характерное для глубокого моря.

Еще отметим, что появление поправочного множителя $\mathrm{sh}\, 2\alpha / 2\alpha$ при H способствует весьма быстрому стремлению числового коэффициента β в уравнении (5) к единице и одновременному стремлению коэффициента γ в том же уравнении к нулю. Тем самым в пределе уравнение поля волн на мелководье (5) приводится к уравнению поля волн на глубоком море, выведенному в [1], как это уже отмечалось выше.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
25 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Шулейкин, ДАН, 104, № 2 (1955). В. В. Шулейкин, ДАН, 98, № 3, 381 (1954).