Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

ФИЗИКА

Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ

К НОВОЙ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 26 IV 1955)

Феноменологическая теория сверхпроводимости, основанная на уравнении Лондона, имеет ряд существенных недостатков (1). Во-первых, выводы этой теории для массивных проводников согласуются с опытными данными лишь в случаях, когда магнитное поле много меньше критического поля $H_к$, а ток много меньше критического тока $I_к$. Во-вторых, эта теория приводит к неправильному выражению для зависимости критического магнитного поля в тонких пленках от толщины пленки и не может разрешить вопроса о поверхностной энергии на границе сверхпроводящей и нормальной фаз металла (1).

В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау развили феноменологическую теорию сверхпроводимости (1), обобщающую «старую» теорию и лишенную указанных недостатков.

Теория Гинзбурга и Ландау основывается на уравнениях для «эффективной» волновой функции Ψ сверхпроводящих электронов и векторного потенциала $\mathbf{A}$. Эти уравнения имеют вид

$$\alpha\Psi = \frac{1}{2m}\left(-ih\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi; \tag{1}$$

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \frac{2\pi ieh}{mc}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{4\pi e^2}{mc^2}|\Psi|^2\mathbf{A}, \tag{2}$$

где α и β — параметры. В состоянии равновесия $|\alpha/\beta| = |\Psi|_0^2 = n_{s0}$, где n_{s0} — число сверхпроводящих электронов. $H_{км}^2 = 4\pi\alpha^2/\beta = 4\pi n_{s0}\alpha$ ($H_{км}$ — критическое магнитное поле для массивного образца).

В настоящей статье выясняется вопрос о виде гамильтониана, соответствующего системе уравнений феноменологической теории Гинзбурга и Ландау, и рассматривается возможная физическая интерпретация параметров α и β.

Рассмотрим систему из N электронов, заряд которых компенсирован положительно заряженными ионами. Если ограничиться учетом только магнитного взаимодействия (включая и спиновое), то гамильтониан рассматриваемой системы может быть представлен в виде

$$H = \frac{1}{2m}\int\Psi^+\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\Psi\,d\mathbf{q} + \frac{1}{8\pi}\int\mathbf{H}^2\,d\mathbf{q} -$$

$$-\frac{eh}{2mc}\int\Psi^+\left(\vec{\hat{\sigma}}', H - G\frac{4\pi eh}{2mc}\Psi^+\vec{\hat{\sigma}}\Psi\right)\Psi\,d\mathbf{q}. \tag{3}$$

В выражении (3) Ψ — операторная волновая функция электрона; $\Psi^+\Psi$ — число электронов; $\frac{4\pi eh}{2mc}\Psi^+\vec{\hat{\sigma}}\Psi$ — намагниченность. Член $G\Psi^+\vec{\hat{\sigma}}\Psi$

учитывает размагничивающее внутреннее поле, действующее на электрон, находящийся в точке $\mathbf{q}$. Для определения численного значения коэффициента G необходимо детальное исследование внутреннего поля.

Уравнения для Ψ и $\mathbf{A}$, соответствующие гамильтониану (4), могут быть записаны в следующем виде:

$$E\Psi = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2(\mathbf{H})\Psi - \frac{eh}{2mc}(\vec{\sigma}\mathbf{H})\Psi + G\,8\pi\left(\frac{eh}{2mc}\right)^2\vec{\sigma}(\Psi^+\vec{\sigma}\Psi)\Psi; \quad (4)$$

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{2\pi ieh}{mc}(\Psi^+\nabla\Psi - \nabla\Psi^+\Psi) + \frac{4\pi e^2}{mc^2}|\Psi|^2\mathbf{A} - 4\pi\frac{eh}{2mc}\operatorname{rot}\Psi^+\vec{\sigma}\Psi. \quad (5)$$

Если среднее значение намагниченности в системе равно нулю (подразумевается усреднение по $\Psi^+\Psi$), то в усредненном гамильтониане будет отсутствовать член, линейный по $\Psi^+\vec{\sigma}\Psi$, а уравнения для «эффективной» усредненной волновой функции и векторного потенциала будут иметь вид:

$$E\Psi = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\Psi + G\,8\pi\left(\frac{eh}{2mc}\right)^2(\Psi^*\Psi)\Psi; \quad (6)$$

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{2\pi ieh}{mc}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{4\pi e^2}{mc^2}|\Psi|^2\mathbf{A}. \quad (7)$$

Мы учли при этом, что $(\Psi^+\vec{\sigma}\Psi)^2 = (\Psi^*\Psi)^2$.

Система уравнений (6), (7) совпадает с системой уравнений (1), (2) феноменологической теории Гинзбурга и Ландау. При этом

$$\beta = G8\pi\left(\frac{eh}{2mc}\right)^2; \quad \alpha = E. \quad (8)$$

В равновесном состоянии ($|\Psi|^2 = n_{s0}$) $\alpha/\beta = n_{s0}$.

Используя соотношения (8), получим выражение для критического магнитного поля в массивном проводнике

$$H_{\text{км}}^2 = 4\pi n_{s0}^2 8\pi\left(\frac{eh}{2mc}\right)^2 G \quad \text{или} \quad \frac{H_{\text{км}}^2}{4\pi n_{s0}} = G\frac{h^2}{2m\delta^2}. \quad (9)$$

Для одномерного случая в безразмерных координатах уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} = \varkappa^2[(\Psi^3 - \Psi) + A^2\Psi]. \quad (10)$$

Параметр $\varkappa^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{mc}{eh}\right)^2\beta$. Если использовать выражение (8) для β, то найдем, что в рассматриваемом нами случае параметр $\varkappa^2 = G$, т. е. определяется коэффициентом внутреннего размагничивающего поля.

Безразмерные переменные удобно ввести несколько иначе, чем это сделано в работе [1]. Именно, положим $H' = H/H_0$, где H_0 — значение магнитного поля на границе сверхпроводника, $z' = z/\delta$; $|\Psi'|^2 = |\Psi|^2/n_{s0}$; тогда в одномерном случае система уравнений (6), (7) принимает вид

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} = G[(\Psi^3 - \Psi) + \eta A^2\Psi]; \quad (11)$$

$$\frac{d^2A}{dz^2} = \Psi^2 A, \quad (12)$$

где $\eta = H_0^2/H_{\text{км}}^2$. В уравнениях (11), (12) штрихи у переменных опущены.

Запишем граничные условия для уравнений (11), (12):

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)_{z=0} = 0; \qquad |\Psi(z)|^2 \to 1 \quad \text{при} \quad z \to \infty;$$
$$\frac{dA}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad z = 0; \qquad A \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{13}$$

Таким образом, в рассматриваемые уравнения входят два параметра. Если хотя бы один из параметров мал, то решение можно искать в виде ряда по этому параметру. При малых η ($H_0 \ll H_{\text{км}}$)

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \Psi_n; \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n A_n. \tag{14}$$

С точностью до η^2

$$\Psi = 1 + \eta \frac{\sqrt{G}}{2\sqrt{2}\,(2-G)} \left\{ \sqrt{\frac{G}{2}}\, e^{-2z} - e^{-\sqrt{2G}z} \right\}; \tag{15}$$

$$A = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-z} - \eta \frac{\sqrt{G}}{4(2-G)} \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{G}{2}}\, e^{-3z} - \frac{1}{\sqrt{G}\,(\sqrt{G}+\sqrt{2})}\, e^{-(\sqrt{2G}+1)z} - \right.$$
$$\left. - \frac{3G^{3/2} + 3\sqrt{2}G - 8\sqrt{G} - 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2G}\,(\sqrt{G}+\sqrt{2})}\, e^{-z} \right\}. \tag{16}$$

Подобно тому как это сделано в работе [1], можно найти зависимость глубины проникновения от величины напряженности магнитного поля, а также зависимость величины критического магнитного поля от толщины для случая тонких пленок. Так например, при $G \ll 1$, $\eta \ll 1$

$$\delta = \delta_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{G}{2}} \left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}} \right)^2 \right\}. \tag{17}$$

В работе автора [2] исследовался спектр элементарных энергетических возбуждений в рамках феноменологической теории Гинзбурга и Ландау. Для спектра возбуждений было получено выражение:

$$E^2 = \frac{H_{\text{км}}^2}{4\pi n_{s0} m}\, p^2 + \frac{p^4}{4m^2} \tag{18}$$

или, используя выражение (9):

$$E^2 = G \frac{h^2}{2m^2\delta^2}\, p^2 + \frac{p^4}{4m^2}.$$

Рассматриваемый спектр удовлетворяет условию сверхпроводимости $v_c = [E/p]_{\min} > 0$. При этом критическая скорость, начиная с которой энергия потока может переходить в энергию возбуждений, равна

$$v_c = \frac{H_{\text{км}}}{\sqrt{4\pi m n_{s0}}} = \sqrt{\frac{G}{2}}\, \frac{h}{m\delta}. \tag{19}$$

Из выражения (19) следует, что если внутреннее размагничивающее поле равно нулю, то критическая скорость равна нулю. При получении спектра возбуждений (18) существенно, чтобы частицы, описываемые усредненной или «эффективной» волновой функцией Ψ, подчинялись статистике Бозе. Это, повидимому, вполне допустимо, поскольку речь идет не о точной волновой функции электронов, а о некоторой усредненной волновой функции, которая описывает движение не отдельных электронов, а возбуждений.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Н. Н. Боголюбову и В. Л. Гинзбургу за обсуждение вопросов, затронутых в настоящей работе.

Московский авиационный
технологический институт

Поступило
30 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **20**, в. 12 (1950). [2] Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ, **28**, в. 6 (1955).