Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. А. СОКОЛИК

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 28 XII 1954)

В работе развивается метод, позволяющий разыскать все релятивистски инвариантные нелинейные уравнения, задающие бозе-поля. В рассуждениях используются результаты работы И. М. Гельфанда и Р. А. Минлоса (1).

Как показано в работе (1), скалярное нелинейное уравнение $(\Box - \varkappa^2)\varphi + \lambda\varphi^2 = J$ может быть заменено линейным уравнением в функциональных производных

$$-i(\Box - \varkappa^2)\frac{\delta z}{\delta J} + \lambda\frac{\delta^2 z}{\delta J^2} - Jz = 0; \qquad (1)$$

z — функционал, зависящий от функции источника, имеет вид: $z = \langle Te^{-i\mathscr{L}}\rangle_0^{-1}$; среднее берется по вакууму; $\mathscr{L}$ — лагранжиан.

Уравнение можно записать в матричной форме:

$$\Gamma\frac{\delta\Psi}{\delta J} - J\Psi = 0; \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -i(\Box - \varkappa^2) & \lambda \\ J & 0 \end{pmatrix}; \quad \Psi = \begin{pmatrix} z \\ \dfrac{\delta z}{\delta J} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Таким образом, введение двукомпонентной функции Ψ позволяет интерпретировать нелинейность как новую степень свободы по аналогии с теорией высших производных (2,3). Так же можно рассматривать нелинейности более общего вида: $\Box\varphi - \varkappa^2\varphi + P_n[\varphi] = J$, где $P_n[\varphi]$ — произвольный полином. В этом случае размерность пространства функций задает порядок нелинейности.

Вводя пространственно-временную решетку и пользуясь обозначениями работы (1), можно заменить (2) системой уравнений в частных производных:

$$\sum_{k=0}^{n}\Gamma_{ik}\frac{\partial\Psi^{(i)}}{\partial J_k} - J_i\Psi^{(i)} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n); \quad \Psi^{(i)} = \begin{pmatrix} z \\ \dfrac{\partial z}{\partial J_i} \end{pmatrix}; \qquad (3)$$

R_{ik} — оператор $(\Box - \varkappa^2)$ в конечных разностях;

$$\Gamma_{ik} = \begin{pmatrix} -i\dfrac{R_{ik}}{\omega} & \dfrac{\lambda}{\omega^2}\delta_{ik} \\ J_i\delta_{ik} & 0 \end{pmatrix};$$

ω — объем пространственно-временной ячейки.

Легко показать, что приведенные рассуждения применимы к уравнениям бозе-частиц произвольного спина:

$$L^i_{\sigma\delta}\frac{\partial\psi_\delta}{\partial X_i} + i\varkappa\psi_\sigma + \lambda\sum_{ik}T^\sigma_{ik}\psi_i\psi_k = \eta_\sigma; \qquad (4)$$

T^{σ}_{ik} — коэффициент разложения, задающего базисные векторы неприводимых представлений, на которые распадается прямое произведение двух неприводимых представлений группы Лоренца ([5],[6]); σ — индекс, пробегающий неприводимые компоненты представления: $\{(k_0^1 k_1^1)\ldots(k_0^k k_1^k)\} \sim$ $\sim R$; R задает уравнение

$$\left(L_l \frac{\partial}{\partial x_l} + i\varkappa\right)\psi = 0. \tag{4}$$

Таким образом, величина $g^{\sigma} = \sum_{ik} T^{\sigma}_{ik}\psi_i\psi_k$, билинейная относительно ψ_i, преобразуется по тем же представлениям группы Лоренца, что и ψ_l. В этом случае уравнение инвариантно относительно группы Лоренца.

Уравнение (4) можно записать в матричной форме:

$$\Gamma^{\alpha}_{k}\frac{\delta\Psi^{(\alpha)}}{\delta\eta_k} - \eta_{l\alpha}\Psi^{(\alpha)} = 0; \qquad \Gamma^{\alpha}_{k} = \begin{Vmatrix} -i\left(L_l\frac{\partial}{\partial x_l} + i\varkappa\right)\lambda\delta_{1k}\ldots\lambda\delta_{nk} \\ T^{\alpha}_{1k}\eta_{\alpha} \\ \vdots \qquad\qquad 0 \\ T^{\alpha}_{nk}\eta_{\alpha}\ldots\ldots\ldots\ldots \end{Vmatrix};$$

$$\Psi^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} z \\ H^{\alpha}_1 \\ H^{\alpha}_2 \\ \vdots \\ H^{\alpha}_n \end{pmatrix}; \qquad H^{\alpha}_i = \sum_k T^{\alpha}_{ik}\frac{\delta z}{\delta\eta_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, n),$$

где n — число уравнений (4).

Введя волновую функцию Ψ и матрицу

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \left\|\frac{\Gamma^1_k}{\eta_1}\right\| & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \left\|\frac{\Gamma^n_k}{\eta_n}\right\| \end{pmatrix}; \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi^{(1)} \\ \vdots \\ \Psi^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

можно записать (5) в виде:

$$\Gamma_k\frac{\delta\Psi}{\delta\eta_k} - \Psi = 0.$$

Легко показать, что $\Psi^{(\alpha)}$ преобразуется по представлению $\{(01)(k_0^1k_1^1)\ldots(k_0^kk_1^k)\}$, $\Psi^{(\alpha)\prime} = U\Psi^{(\alpha)}$, причем U можно выразить через S, где $\psi' = S\psi$:

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 0' \\ 0' & \| S \| \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Условие инвариантности относительно преобразований Лоренца, аналогичное условию работы (4), имеет вид:

$$\Gamma^{(\alpha)}_l = S_{lj}U^{-1}\Gamma^{(\alpha)}_j U. \tag{7}$$

Переходя к инфинитезимальным операторам, получим:

$$U = 1 + {}^1/_2\varepsilon_{ij}S^{ji}; \quad S = 1 + {}^1/_2\varepsilon_{ij}I^{ji}; \quad I^{ji} = \begin{vmatrix} 0 & 0' \\ 0' & \| S^{ji} \| \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Тогда из условия (7) следует следующее соотношение, задающее матрицу $\Gamma_l^{(\alpha)}$:

$$[\Gamma_l^{(\alpha)} I^{lm}] = -\sum_j S_{ij}^{ml}\, \Gamma_j^{(\alpha)}. \tag{8}$$

Если S совпадает с преобразованием Лоренца (источник η_α является четырехмерным вектором), инфинитезимальный оператор S_{ij}^{ml} имеет вид

$$S_{ij}^{ml} = g_{im}g_{lj} - g_{il}g_{mj}, \qquad \| g_{im} \| = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & -1 \end{Vmatrix}; \tag{8}$$

в этом случае условие (8) переходит в условие работы ([4]):

$$[\Gamma_l^{(\alpha)} I^{lm}] = g_{il}\Gamma_m^{(\alpha)} - g_{im}\Gamma_l^{(\alpha)}. \tag{9}$$

Для тривиального представления (01), (01), задающего два скаляра, имеет место матрица

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} -i(\Box - \varkappa^2) & \lambda \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

удовлетворяющая условию (7). Соответствующее уравнение эквивалентно уравнениям (1) и (2).

Легко заметить, что уравнение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\Gamma_k^\alpha \frac{\delta\Psi^{(\alpha)}}{\delta\eta_k} - \eta_\alpha \Psi^{(\alpha)} + D^{(\alpha)}\Psi = 0; \tag{10}$$

матрицы Γ_k^α и $D^{(\alpha)}$ равняются:

$$\Gamma_k^\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & T_{1k}^k & \dots & T_{nk}^k \\ \delta_{1k}\eta_\alpha & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \delta_{nk}\eta_\alpha & \dots & \dots & \end{Vmatrix}; \qquad D^{(\alpha)} = -i \begin{Vmatrix} 0 & \left(L_i \frac{\partial}{\partial x_i} + i\varkappa\right)_{\alpha 1} & \dots & \left(L_i \frac{\partial}{\partial x_i} + i\varkappa\right)_{\alpha n} \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Правая часть уравнения (10) состоит из двух частей: операторов $\Gamma_k^\alpha \frac{\delta}{\delta\eta_k} - \eta_\alpha$ и $D^{(\alpha)}$, которые заданы представлением группы Лоренца $R \sim \{(k_0'k_1') \dots (k_0^n k_1^n)\}$.

В частности, уравнение (2) запишется следующим образом:

$$D\Psi + \Gamma\frac{\delta\Psi}{\delta J} - J\Psi = 0; \quad D = \begin{Vmatrix} 0 & -i(\Box - \varkappa^2) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Для случая нелинейности высших порядков операторы $D^{(\alpha)}$ и $\Gamma_k^\alpha \frac{\delta}{\delta\eta_k} - \eta_\alpha$ задаются, вообще говоря, различными представлениями.

Уравнение (10) аналогично уравнению с оператором массы типа Пайса, исследованному в работах ([6],[7]). Источник η_{α} приобретает таким образом смысл добавочной переменной (внутренняя степень свободы).

Уравнения типа (5), (10) описывают широкий класс нелинейных полей. Таким образом, изложенный метод позволяет интерпретировать нелинейность как некоторое свойство пространства представления группы Лоренца, аналогичное спину частицы. Кроме этого развитый аппарат дает возможность провести классификацию всех нелинейных уравнений, релятивистски инвариантных и квантующихся по бозе-статистике.

Заметим, что к уравнениям (2) и (5) может быть применен метод слияния как в формулировке работы де-Бройля, так и в более общей формулировке ([5],[6],[8]), что позволяет из простейших нелинейных уравнений получить уравнения с нелинейными членами любого порядка.

Выражаю благодарность Д. Д. Иваненко и Н. Н. Боголюбову за интерес к работе и плодотворные дискуссии.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, ДАН, **97**, № 2 (1954). [2] А. В. Гуревич, ЖЭТФ, **24**, 2 (1953). [3] В. Григорьев, Вестн. МГУ, 3 (1951). [4] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, ЖЭТФ, **18**, 703 (1948). [5] Г. А. Соколик, ЖЭТФ, **28**, в. 1 (1955). [6] Д. Иваненко, Г. Соколик, ДАН, **97**, № 4 (1954). [7] L. de-Broglie, Théorie générale des particles à spin, Paris, 1943.