Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Б. ДАЦЕВ

О ДВУХМЕРНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1955)

Пусть A_1 и A_2 — два однородных тела, причем A_2 — бесконечно длинный цилиндр, а A_1 — область, внешняя к A_2. Их нормальное сечение плоскостью, которую выбираем за плоскость OXY, дает две области R_1 и R_2, где R_2 — простая область, ограниченная контуром l, который считаем гладким, а R_1 — внешняя к l бесконечная двухсвязная область. Если температуры u_1 и u_2 тел A_1 и A_2 зависят только от x, y, t, то изучение температурного поля A_1 и A_2 сводится к изучению поля плоских областей R_1 и R_2 (или пластинок A_1 и A_2). Этой задачей мы займемся в настоящей работе.

Пусть $u_i(x, y, t)$ $(i = 1, 2)$ — температуры R_1 и R_2; k_i, ρ_i, σ_i — соответственно, их коэффициенты теплопроводности, плотности и удельные теплоты. Функции u_i удовлетворяют уравнениям теплопроводности

$$a_i^2 \Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \left(a_i^2 = \frac{k_i}{\rho_i \sigma_i},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

начальным условиям

$$u_i(x, y, 0) = \Phi_i(x, y), \tag{2}$$

где Φ_i — ограниченные интегрируемые функции в R_i, и условиям непрерывности по l

$$u_1 = u_2; \tag{3}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu}; \tag{3'}$$

ν — внутренняя нормаль к l.

Ищутся функции u_1, u_2, удовлетворяющие (1), (2), (3), (3').

Здесь мы имеем двухслойную двухмерную задачу температурного распределения. Многослойная линейная задача теплопроводности исследована многими авторами ([1,2]). В работах ([3–5]) мы решили линейную многослойную задачу и считаем, что этим она в общем исчерпана. О двухмерной многослойной задаче есть общие исследования ([6]) и решения в частном случае ([7] — концентрические круговые цилиндры). Здесь мы дадим решение двухмерной задачи в достаточно общем случае, начиная с двухслойной задачи. Примененный здесь метод решения является последовательным обобщением метода, развитого нами в работах ([3–5]).

Пусть $M_0(s_0)$ — точка l, определенная дугой s_0, отсчитываемой от фиксированной точки O_1 на l. Пусть $f(s, t)$ — температура точки $M(s)$ на l. Считая f известной функцией, можно температуры u_1 и u_2 выразить следующим образом ([8,9]):

$$u_2(x, y, t) = V_2(x, y, t) + W_2(x, y, t), \tag{4}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi a_2^2 t}\int\limits_{R_2}\int \Phi_2(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a_2^2 t}\right] d\xi\, d\eta, \tag{5}$$

$$W_2 = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_l d\sigma\, \mu_2(\sigma, \tau) K_2(x, y, \sigma, t, \tau), \tag{6}$$

$$K_2 = \frac{\partial E_2}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\exp\left[-\dfrac{r_2^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right]}{2\pi(t-\tau)} = \frac{\exp\left[-\dfrac{r_2^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right] r_2 \cos(r_2 \nu)}{4a_2^2(t-\tau)^2}. \tag{6'}$$

Здесь $M_0(\sigma)$ — точка l; $M_2(x, y)$ — точка R_2; $r_2 = M_0M_2$; $\mu_2(\sigma, \tau)$ — неизвестная функция (плотность двойного теплового слоя W_2 (6) на l); Φ_2 — данная ограниченная интегрируемая функция (начальная температура A_2 согласно (2)). Аналогично выражается u_1.

Известно, что если точка M_2 пересекает l, то W_2 претерпевает конечный разрыв ([8]). Если M_2 стремится к точке M_{20} контура l ($K_2 \to K_2(s, \sigma, t, \tau)$), то в предельном выражении W_2 функция μ_2 выходит за интеграл. Выражая условие, что $u_2 \to f$ по l, находим уравнение

$$\mu_2(s, t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_l \mu_2(\sigma, \tau) K_2(s, \sigma, t, \tau)\, d\sigma = f(s, t) - V_2(s, t). \tag{7}$$

Решение этого интегрального уравнения для μ_2 известно ([8,9]). Если K^2 — его резольвента, имеем

$$\mu_2(s, t) = f(s, t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_l d\sigma\, f(\sigma, \tau) K^2(s, \sigma, t, \tau) + V_2^1(s, t), \tag{8}$$

где V_2^1 легко выражается через V_2 и K^2.

Подставляя μ_2 (8) в W_2 (6) и изменяя порядок интегрирования в четырехкратном интеграле, можно представить W_2 в виде

$$W_2(x, y, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_l d\sigma\, f(\sigma, \tau)\{K_2(x, y, \sigma, t, \tau) + L_2(x, y, \sigma, t, \tau)\} + V_2^2(x, y, t), \tag{9}$$

где L_2, V_2^2 легко выразить через K_2, K^2, V_2^1. Таким образом, W_2, а следовательно и u_2 (4), выражаются через f, и аналогичной формулой u_1 выражается через f. Неизвестную функцию f определим из условия (3′) (условие (3) выполнено автоматически).

Чтобы (3′) выполнялось надо составить выражение $\partial u_l / \partial \nu$. Пусть точка M_2 близка к точке M_{20} на l и ν' проходит через M_{20} и направлено перпендикулярно ν. Используя (6′) и то, что E_2 удовлетворяет (1) ($i = 2$), найдем

$$\frac{\partial K_2}{\partial \nu} = \frac{\partial^2 E_2}{\partial \nu^2} = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial \nu'^2} \tag{10}$$

и, при помощи (10) и (9):

$$\frac{\partial W_2}{\partial \nu} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_l d\sigma\, f(\sigma, \tau)\left\{\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial \nu'^2} + \frac{\partial L_2}{\partial \nu}\right\} + \frac{\partial V_2^2}{\partial \nu}. \tag{11}$$

Таким же образом выразим $\partial W_1/\partial \nu$ через E_1 ($V'_{1,\nu}$ и $V'_{2,\nu}$ вычисляются непосредственно). Во избежание особенностей в полученных выражениях для $t=0$, заменяем условие (3′) другим, интегрируя (3′) по t от 0 до T. Подставляя в полученное условие выражения $V'_{2,\nu}$, $W'_{2,\nu}$ (11), $V'_{1\nu}$, $W'_{1,\nu}$, получим

$$\int_0^T dt \int_0^t d\tau \int_l d\sigma\, f(\sigma,\tau)\left(b_1\frac{\partial E_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial E_2}{\partial t}\right)+$$

$$+\int_0^T dt\int_0^t d\tau\int_l d\sigma\, f(\sigma,\tau)\,N(s,\sigma,t,\tau)=M(s,T). \qquad (12)$$

Здесь $b_1=k_1/2\pi a_1^2$, $b_2=k_2/2\pi a_2^2$, а выражения M, N можно легко составить при помощи известных выражений.

Изменяя в (12) порядок интегрирования по t и τ и выполняя интегрирование по t в первом члене (12), получим

$$\int_0^T d\tau\int_l d\sigma\, f(\sigma,\tau)\,E(s,\sigma,T,\tau)+\int_0^T d\tau\int_l d\sigma\, f(\sigma,\tau)\,N_1(s,\sigma,T,\tau)=M(s,T), \qquad (13)$$

$$E=E'+E''=\frac{b_1}{T-\tau}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4a_1^2(T-\tau)}\right]+\frac{b_2}{T-\tau}\exp\left[-\frac{r_0^2}{4a_2^2(T-\tau)}\right], \qquad (13')$$

где $r_0=M_0M_{20}$, а N_1 можно просто выразить через N. (13) есть интегральное уравнение для f.

Как и в линейном случае ([3]), умножим уравнение (13) на $dT\sqrt{T_0-T}$ и интегрируем его по T от 0 до T_0. Тогда в первом члене (13), беря в нем только E' из выражения E (13′) и меняя порядок интегрирования по T и τ, найдем выражение

$$I_1=b_1\int_0^{T_0}d\tau\int_\tau^{T_0}\frac{dT\,C(T,\tau)}{\sqrt{T_0-T}\,(T-\tau)},\quad C(T,\tau)=\int_l d\sigma\, f(\sigma,\tau)\exp\left[\frac{-r_0^2}{4a_1^2(T-\tau)}\right]. \qquad (14)$$

Дифференцируя I_1 по T_0, найдем

$$\frac{\partial I_1}{\partial T_0}\to\frac{\sqrt{\pi}\,k_1}{a_1}f(s,T_0)+b_1\int_0^{T_0}d\tau\,\frac{\partial}{\partial T_0}\int_\tau^{T_0}\frac{\partial T\,C(T,\tau)}{\sqrt{T_0-T}\,(T-\tau)}. \qquad (14')$$

Далее, после интегрирования по T, дифференцируем (13) по T_0. Используя (14′) и меняя порядок интегрирования во втором члене (13), получим

$$Af(s,T_0)+\int_0^{T_0}d\tau\int_l d\sigma\, f(\sigma,\tau)\,F(s,\sigma,T_0,\tau)=\frac{\partial}{\partial T_0}\int_0^{T_0}\frac{M(s,T)\,dT}{\sqrt{T_0-T}}, \qquad (15)$$

$A=\sqrt{\pi}\,(k_1/a_1+k_2/a_2)$. Функция F выражается просто посредством составленных выше выражений.

(15) есть интегральное уравнение известного типа (7) для функции f и его решение находится таким же образом. (Ядро F имеет слабую особенность и правая часть (15) — ограниченная функция T_0.) Подставляя f из (15) в W_2 (6) и W_1, получим функции u_2 и u_1, удовлетворяющие условиям (1), (2), (3), (3′). Таким образом, решена поставленная задача. Можно проверить, что если l превратится в прямую линию (ось OY) и Φ_1, Φ_2 — функции только x, найденное здесь решение совпадает с решением соответствующего линейного случая, данным в [3].

Найденные результаты можно обобщить. Рассмотрим, например, n однородных цилиндрических тел, соответственно n пластинок R_i в плоскости OXY, ограниченных гладкими контурами $l_1, l_2, \ldots, l_n$, когда каждый контур l_i включает остальные $l_{i+1}, \ldots, l_n$; R_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ — двухсвязная область, ограниченная l_i и l_{i+1}; R_n — простая область. Даны начальные температуры $\Phi_i(x, y)$ областей R_i и температура $f_1(s, t)$ внешнего контура l_1. На $l_2, \ldots, l_n$ выполняются условия (3), (3′). Для нахождения температуры u_i областей R_i обозначим $f_2(s_2, t), \ldots, f_n(s_n, t)$ температуры $l_2, \ldots, l_n$. Рассмотрим тепловые двойные слои плотностей $\mu_i(s_i, t)$ на l_i. Функцию u_n найдем как выше. u_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ будем искать в виде $u_i = V_i + W_i^1 + W_i^2$, где V_i имеет вид, аналогичный (5), а W_i^1, W_i^2 — аналогичный (6). Неизвестные функции μ_i, μ_{i+1} в W_i^1, W_i^2 найдем, как выше, из системы двух интегральных уравнений, аналогичной (7). Из условий (3′) $(i = 2, \ldots, n)$, проинтегрированных по t, найдем систему из $n-1$ интегральных уравнений вида (15) для неизвестных функций $f_2, \ldots, f_n$, откуда найдем $u_1, \ldots, u_n$. Этим решена поставленная задача.

Другой интересный вариант двухмерной задачи будем иметь, если $R_2, \ldots, R_n$ — простые области, ограниченные гладкими контурами $l_2, \ldots, l_n$, а R_1 — n-связная область, содержащая $R_2, \ldots, R_n$ и ограниченная гладкой кривой l_1, на которой задана температура $f_1(s, t)$. Начальные условия (2) и условия на $l_2, \ldots, l_n$ (3), (3′). $u_2, \ldots, u_n$ определяются как выше, а для определения u_1 полагаем $u_1 = V_1 + W_1^1 + \ldots + W_1^n$, где W_1^α — потенциал теплового двойного слоя плотностью μ_α на l_α. Условия на $l_1, \ldots, l_n$ приводят для определения $\mu_2, \ldots, \mu_n$ к системе n интегральных уравнений вида (7), а функции $f_2(s_2, t), \ldots, f_n(s_n, t)$ определяются посредством условий (3′), проинтегрированных по t, что снова приводит к $n-1$ интегральным уравнениям вида (15).

Аналогично решается вопрос, когда в задачах рассмотренных типов на внешнем контуре вместо температуры задано излучение, т. е. $\partial u_1 / \partial \nu$, или линейная зависимость между $u_{1\nu}$ и u_1. Тогда выражение для u_1 содержит член W — потенциал простого теплового слоя плотностью $\mu_1(s, t)$ на l_1 [8]. В остальном задача решается как выше.

Софийский государственный университет
София, Болгария

Поступило
3 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, М.—Л., 1947. [2] С. С. Ковнер, Изв. АН СССР, Отд. матем. и естеств. наук, 419 (1937). [3] А. Б. Дацев, ДАН, **55**, № 2 (1947); **56**, № 3 (1947); **56**, № 4 (1947); Ann. de l'Univ. de Sofia, **45**, 1. 1 (1948/49). [4] А. Б. Дацев, Изв. АН СССР. сер. геогр. и геофиз., **14**, № 2 (1950); C. R. de l'Ac. Bulgare des Sci., **2**, № 2 (1949). [5] А. Б. Дацев, ДАН, **82**, № 6 (1952). [6] Н. Малкин, ДАН, **20**, № 2/3 (1938). [7] С. С. Ковнер, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 374 (1940). [8] Г. Мюнц, Интегральные уравнения, 1934. [9] С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, М., 1947.