Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

ГИДРАВЛИКА

Г. С. САЛЕХОВ

ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 I 1955)

1. Гидродинамические задачи о перемещении контура нефтеносности (КН) ставились и решались многими авторами. Для случая водонапорного режима задача такого рода изучена, например, в работах ([1–5]) и для упругого режима в работах ([6,7]) и др.

В обычной постановке этих задач считают известными число, расположение и дебит скважин и находят закон перемещения КН. В настоящей работе ставится обратная задача, а именно: принимая заданным практически желаемый закон стягивания КН, определяем необходимые для этого характер размещения и дебиты скважин.

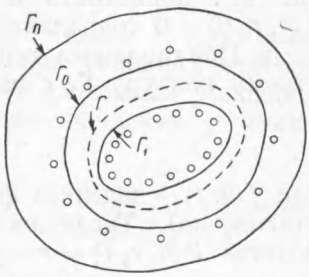


Рис. 1

2. Рассмотрим горизонтальный пласт, ограниченный замкнутым контуром питания $\Gamma_п$, на котором сохраняется давление $p_п$. Пусть в пласте разбурены гидродинамически совершенные эксплуатационные и нагнетательные скважины, которые приняты за вертикальные линейные стоки и источники. Предположим, что Γ_0 (см. рис. 1) — первоначальное положение КН, Γ — положение КН в текущий момент времени, Γ_1 — конечное положение КН. Область G^- между $\Gamma_п$ и Γ занимает вода с вязкостью $\mu_в$ и область G^+ внутри Γ — нефть с вязкостью $\mu_н$. Движение жидкостей подчиняется линейному закону фильтрации. Обозначим (φ_i, ρ_i) — полярные координаты скважин, принимая за полюс O точку внутри Γ_1; q_i — текущие объемные дебиты скважин, где индекс $i = 1, 2, \ldots, n,\ n+1, \ldots, n+l$, причем значения $i = 1, 2, \ldots, n$ соответствуют эксплуатационным скважинам, размещенным внутри Γ_1, $i = n+1,\ n+2, \ldots, n+l$ — нагнетательным скважинам в зоне между Γ_0 и Γ_1.

При сделанных предположениях требуется определить такое размещение скважин и такой способ их эксплуатации, которые в пределах практически возможной вариации параметров (φ_i, ρ_i) и q_i наилучшим образом обеспечивали бы желаемый закон стягивания КН.

3. Очевидно, с учетом всех прочих физико-геологических условий пласта (неоднородность, переменность мощности, режим пласта и др.) гидродинамическое давление p является функцией полярных координат θ, r, времени t и $3(n+l)$ параметров (φ_i, ρ_i) и q_i. Функция p должна удовлетворять краевому условию $p|_{\Gamma_п} = p_п$ и, при учете упругости жидкостей и породы, начальному условию $p|_{t=0} = u(\theta, r)$. Если давле-

ние внутри нефтяной области G^+ обозначим через p^+, а в водной области G^- через p^-, то, в силу непрерывности давления и нормальных скоростей, на Г должны выполняться условия

$$p^+|_\Gamma = p^-|_\Gamma; \quad \frac{k}{\mu_н}\frac{\partial p^+}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{k}{\mu_в}\frac{\partial p^-}{\partial n}\Big|_\Gamma,$$

где k — проницаемость пласта. Предположим, что при данном режиме пласта функция p в зависимости от параметров φ_i, ρ_i и q_i определена так, что все вышеуказанные краевые и начальные условия выполнены.

4. Далее, пользуясь законом Дарси, уравнение движения КН в полярных координатах можно записать в виде одного из следующих эквивалентных уравнений:

$$\begin{aligned} m\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu_н}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial p^+}{\partial \theta}\right]_\Gamma \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{k}{\mu_н}\left[\frac{\partial p^+}{\partial r}\right]_\Gamma \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \\ m\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{k}{\mu_в}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial p^-}{\partial \theta}\right]_\Gamma \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{k}{\mu_в}\left[\frac{\partial p^-}{\partial r}\right]_\Gamma \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где m — пористость и $F(\theta, r, t) = 0$ — уравнение контура Г, причем $F(\theta, r, 0) = 0$ совпадает с уравнением Γ_0.

5. Предположим теперь, что мы желаем контур Γ_0 стянуть к известному контуру Γ_1 с наперед заданным законом

$$r = f(\theta, t)^*, \tag{2}$$

где $f(\theta, t)$ — заданная функция для $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ (T — время стягивания). Тогда на основании, например, первого уравнения (1), полагая $F(\theta, r, t) = r - f(\theta, t)$, имеем

$$m\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{k}{\mu_н}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial p^+}{\partial \theta}\right]_\Gamma - \frac{k}{\mu_н}\left[\frac{\partial p^+}{\partial r}\right]_\Gamma = \varepsilon, \tag{3}$$

где ε есть та «невязка», которая получилась за счет наперед заданного нами закона стягивания КН (2). ε является известной функцией переменных θ, t и параметров (φ_i, ρ_i) и q_i. Очевидно, для того, чтобы обеспечить закон стягивания, возможно наиболее близкий к заданному (2), необходимо добиться наименьшего уклонения от нуля невязки ε путем вариации параметров (φ_i, ρ_i) и q_i. Для этого можно применить известные методы минимальной погрешности ([8]).

Можно различать следующие два основных типа задач управления движением КН:

1) Если число параметров φ_i, ρ_i, q_i, находящихся в нашем распоряжении, равно $N = 3(n + l)$, то эту задачу мы будем называть общей задачей управления движением КН как по способу размещения, так и по характеру эксплуатации скважин.

2) Если $N < 3(n + l)$, то эту задачу мы будем называть частной задачей управления движением КН. Сюда же относятся задачи управления КН либо только по характеру эксплуатации (когда все φ_i, ρ_i фиксированы), либо только по способу размещения скважин (когда все q_i фиксированы).

---

* Контуры Γ_0 и Γ_1 считаются звездными.

Следует иметь в виду, что параметры φ_i, ρ_i, q_i должны удовлетворять следующим основным требованиям:

1) $q_i \leqslant 0$, если $i = 1, 2, \ldots, n$, и $q_i \geqslant 0$, если $i = n+1, \ldots, n+l$;

2) φ_i, ρ_i не должны зависеть от времени t;

3) все $\rho_i \geqslant 0$.

6. С целью извлечения максимального количества нефти и удлинения сроков безводной эксплуатации данного нефтяного месторождения, необходимо так расставить скважины и так их эксплуатировать, чтобы контур Γ_0 стянулся к наперед заданному контуру Γ_1 монотонно, без образования нефтяных «целиков» и преждевременных водных «языков». Это будет иметь место, если, например, закон стягивания (2) принят в виде

$$r^2 = r_0^2 - \frac{t}{T}(r_0^2 - r_1^2), \tag{4}$$

где $r_0 = f_0(\theta)$, $r_1 = f_1(\theta)$, соответственно, определяют полярные уравнения контуров Γ_0 и Γ_1, причем контур Γ_1 заранее нами выбирается выпуклым. Очевидно, такие законы монотонного стягивания можно задавать бесчисленным способом. Однако скорость и время T стягивания Γ_0 к Γ_1 практически не могут быть выбраны произвольно, они определяются рядом нефтепромысловых условий эксплуатации данного месторождения.

7. Пусть, например, изотропный однородный пласт с круговым контуром питания радиуса R эксплуатируется при условиях водонапорного режима, мощность пласта h постоянна и в пластовых условиях $\mu_в = \mu_н = \mu$. При этих предположениях функция давления p имеет вид:

$$p = p_п + \frac{\mu}{2\pi k h}\sum_{i=1}^{n+l} q_i \ln \sqrt{\frac{R^2 - 2r\rho_i\cos(\theta - \varphi_i) + \frac{\rho_i^2}{R^2}r^2}{r^2 - 2r\rho_i\cos(\theta - \varphi_i) + \rho_i^2}}. \tag{5}$$

Предположим, что $r_0 = \text{const}$ и $r_1 = \text{const}$ $(r_0 > r_1)$ являются, соответственно, уравнениями контуров Γ_0 и Γ_1. Закон стягивания КН задан в виде (4).

Исходя из среднего суммарного дебита эксплуатационных скважин $\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{V_0}{T}$, где $V_0 = mh\pi(r_0^2 - r_1^2)$ есть поровое пространство цилиндров высотой h, легко определяем реально допустимое T. Далее, из уравнения (3) определяем невязку ε и, разлагая ее в ряд Фурье в промежутке $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, составляем равенство Парсеваля

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\theta = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k^2 + B_k^2], \tag{6}$$

где $A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\cos k\theta\, d\theta$, $B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\sin k\theta\, d\theta$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Согласно (6) для того, чтобы $\varepsilon \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Фурье равнялись нулю. Однако в общем случае выбором лишь $N \leqslant 3(n+l)$ параметров φ_i, ρ_i, q_i добиться точного выполнения $\varepsilon \equiv 0$ невозможно. Выбором N параметров φ_i, ρ_i, q_i можно лишь удовлетворить условию равенства нулю первых N не обращаю-

щихся тождественно в нуль и независимых между собой коэффициентов Фурье. Для нашего случая имеем следующую систему уравнений относительно φ_i, ρ_i, q_i:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i = -1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i (z_i^k + x_i^k) \cos k\varphi_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} \tilde{q}_i (z_i^k - y_i^k) \cos k\varphi_i = 0, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i (z_i^k + x_i^k) \sin k\varphi_i + \sum_{i=n+1}^{n+l} \tilde{q}_i (z_i^k - y_i^k) \sin k\varphi_i = 0,$$

где $i = 1, 2, \ldots, L$, $\tilde{q}_i = -Tq_i / V_0$, $x_i = \rho_i / r < 1$, $y_i = r / \rho_i < 1$, $z_i = r\rho_i / R^2 < 1$. Среднеквадратическая допускаемая ошибка ε может быть вычислена по формуле (6).

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии наук СССР

Поступило
25 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Собр. тр., М., 1953. [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, ДАН, **47**, № 4 (1945). [3] В. Н. Щелкачев, Б. Б. Лапук, Подземная гидравлика, 1949. [4] И. А. Чарный, Подземная гидромеханика, 1948. [5] М. Маскет, Течение однородных жидкостей в пористой среде, 1949. [6] Н. Н. Веригин, ДАН, **91**, № 4 (1953); Изв. АН СССР, ОТН, № 5 (1952). [7] Н. С. Пискунов, ДАН, **84**, № 5 (1952). [8] Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1953.