Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 11 XII 1954)

Рассмотрим в слое $[0, T]$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ систему дифференциальных уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} A^{(i_1, \ldots i_r)}(t, X) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}} + A(t, X) u = f(t, X), \quad (1)$$

где $A^{(i_1, \ldots, i_r)}(t, X)$ и $A(t, X)$ — квадратные матрицы порядка N; u и $f(t, X)$ — вектор-функции в N-мерном комплексном векторном пространстве. При этом матрицы $A^{(i_1, \ldots, i_r)}(t, X)$, отличающиеся порядком следования индексов, будем считать равными.

В недавно опубликованной заметке [1] С. Д. Эйдельман сообщил о полученных им оценках основной матрицы $G(t, X; \tau, Y)$ решений однородной параболической системы типа (1) и о применении полученных оценок для доказательства корректной разрешимости задачи Коши для этой системы. Эти оценки имеют вид:

$$|D_x^l G(t, X; \tau, Y)| \leqslant \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{n+l}{2p}}} \exp\left\{-\eta \left[\frac{|X-Y|}{\sqrt[2p]{t-\tau}}\right]^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}, \quad 0 \leqslant l \leqslant 2p, \ t > \tau. \quad (2)$$

Используя оценки (2) и оценки для разностей $G(t, X; \tau, Y)$, мы доказываем равномерную корректность постановки задачи Коши для неоднородных систем (1). Пусть сначала коэффициенты системы зависят только от t и непрерывны в $[0, T]$.

Лемма 1. *Пусть* $a > 0$ *— достаточно малое число и пусть* $|H| + |h|^{1/2p} < a\sqrt[2p]{t-\tau}$. *Тогда*

$$|D_x^l G(t+h, X+H; \tau, Y) - D_x^l G(t, X; \tau, Y)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C(|H| + |h|^{1/2p})}{(t-\tau)^{\frac{n+l+1}{2p}}} \exp\left\{-\eta \left[\frac{|X-Y|}{\sqrt[2p]{t-\tau}}\right]^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}. \quad (3)$$

Будем говорить, что $f(t, X)$ удовлетворяет условию (R) в области (D) слоя $[\tau, T]$, если она непрерывна в (D) и функция $\lambda(u, D) = \sup_{|X_1 - X_2| \leqslant u} |f(t, X_1) - f(t, X_2)|^*$, (t, X_1) и $(t, X_2) \in (D)$, такова, что

$$\int_0^b \frac{\lambda(u, D)}{u} du < +\infty \quad (b > 0).$$

* $|f(t, X)|$ — длина вектора $f(t, X)$.

Введем следующие функциональные пространства:

1. L_q^{μ} $(q \geqslant 1,\ \mu \geqslant 0)$ — пространство вектор-функций $\varphi(X)$, для которых $|\varphi(X)| \exp\{-\mu |X|^{\frac{2p}{2p-1}}\}$ суммируема со степенью q по всему пространству X. Норму $\varphi(X)$ в L_q^{μ} положим равной

$$N_q^{\mu}(\varphi) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int |\varphi(X)|^q \exp\left\{-\mu q |X|^{\frac{2p}{2p-1}}\right\} dX\right]^{\frac{1}{q}}.$$

2. C^{μ} $(\mu \geqslant 0)$ — пространство непрерывных вектор-функций, для которых $|\varphi(X)| \exp\left\{-\mu |X|^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}$ ограничена. Норму $\varphi(X)$ положим равной $K^{\mu}(\varphi) = \sup\left[|\varphi(X)| \exp\left\{-\mu |X|^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}\right]$.

Условимся называть решение параболической системы регулярным, если оно имеет непрерывные производные, входящие в систему.

Теорема 1*. *Пусть $u(t, X)$ удовлетворяет следующим условиям:* 1) *при $\tau < t \leqslant T$ она является регулярным решением однородной параболической системы;* 2) *интеграл*

$$\int_{\tau}^{T} dt \int_{-\infty}^{+\infty}\int \exp\left\{-\beta |X|^{\frac{2p}{2p-1}}\right\} |u(t, X)|\, dX < +\infty$$

при некотором $\beta \geqslant 0$; 3) *по любой конечной области (D)*

$$\lim_{t \to \tau + 0} \iint_{(D)} |u(t, X)|\, dX = 0.$$

Тогда $u(t, X) \equiv 0$ при $\tau < t \leqslant T$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(X) \in L_q^{\mu}$ $\left(0 \leqslant \mu < \eta (T - \tau)^{-\frac{1}{2p-1}}\right)$, $f(t, X)$ удовлетворяет условию (R) в любой конечной области слоя $[\tau, T]$ и*

$$\int_{\tau}^{T} dt \int_{-\infty}^{+\infty}\int |f(t, X)|^q \exp\left\{-\mu q |X|^{\frac{2p}{2p-1}}\right\} dX < +\infty. \tag{4}$$

Тогда

$$u(t, X; \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int G(t, X; \tau, Y) \varphi(Y)\, dY + \int_{\tau}^{t} ds \int_{-\infty}^{+\infty}\int G(t, X, s, Y) f(s, Y)\, dY \tag{5}$$

является при $\tau < t < T$ регулярным решением системы (1), *удовлетворяющим начальному условию в формах:* а) *для всех точек Лебега $\varphi(X)$, т. е. почти всюду:* $\lim\limits_{t \to \tau + 0} u(t, X; \tau) = \varphi(X)$; б) *при $\sigma_1 > \mu$, если $\mu > 0$, и $\sigma_1 = 0$, если $\mu = 0$:* $\lim\limits_{t \to \tau + 0} N_q^{\sigma_1}(u(t, X; \tau) - \varphi(X)) = 0$. *Это решение непрерывно зависит от начальных данных $\varphi(X)$ и правой части $f(t, X)$ в следующем смысле: пусть $\varphi_n(X)$ и $f_n(t, X)$ — последовательность начальных данных и правых частей, удовлетворяю-*

---

* Приводимая ниже теорема единственности для задачи Коши несколько усиливает соответствующую теорему С. Д. Эйдельмана ([1]).

щих поставленным выше условиям, и пусть $u_n(t, X; \tau)$ *— решения соответствующих задач Коши. Тогда из равенств*

$$\lim_{n\to\infty} N_q^{\mu}(\varphi_n(X) - \varphi(X)) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\tau}^{T} N_q^{\mu}(f_n(t, X) - f(t, X))\, dt = 0$$

следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} N_q^{\sigma}(u_n(t, X; \tau) - u(t, X; \tau)) = 0$$

равномерно для всех t *из* $[\tau, T]$. *При этом*

$$\sigma = 0 \text{ при } \mu = 0; \qquad \sigma > \frac{\eta\mu}{[\eta^{2p-1} - (T-\tau)\,\mu^{2p-1}]^{\frac{1}{2p-1}}}.$$

Имеет место аналогичная теорема с заменой L_q^{μ} на C^{μ} и N_q^{μ} на K^{μ}. Если $\mu < \eta T^{-\frac{1}{2p-1}}$, то все равенства выполняются равномерно относительно τ из $[0, T]$. Поэтому задача Коши равномерно корректно разрешима в $[0, T]$ в определенном выше смысле.

Положим второй из интегралов в (5) равным $u_1(t, x; \tau)$. Тогда в условиях теоремы 2 для производных имеют место равенства:

$$D_x^{2p} u_1(t, X; \tau) = \int_{\tau}^{t} ds \iint_{-\infty}^{+\infty} D_x^{2p} G(t, X; s, Y)\,[f(s, Y) - f(s, X)]\, dY, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1(t, X; \tau) = \int_{\tau}^{t} ds \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} G(t, X; s, Y)\,[f(s, Y) - f(s, X)]\, dY +$$

$$+ f(t, X) + A(t) \int_{\tau}^{t} Z(t, s) f(s, X)\, ds, \qquad (7)$$

где $Z(t, s) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(t, X; s, Y)\, dY$. Младшие производные по $x_1, \ldots, x_n$ получаются формальным дифференцированием под знаком интеграла.

Рассмотрим теперь параболическую систему 2-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} A^{(i,j)}(t, X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A^{(j)}(t, X) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A(t, X)\, u = f(t, X). \qquad (8)$$

При этом предположим, что в $[0, T]$:

1^0. $A^{(i,j)}(t, X)$ непрерывны и ограничены вместе со своими производными по $x_1, \ldots, x_n$ до 2-го порядка.

2^0. $A^{(j)}(t, X)$ непрерывны и ограничены вместе со своими производными $\partial A^{(j)} / \partial x_j$.

3^0. $A(t, X)$ непрерывна и ограничена.

4^0. Пусть $F(t, X)$ — любая из матриц, упомянутых в 1^0, 2^0, 3^0. Тогда

$$|F(t, X + H) - F(t, X)| \leqslant K |H|^{\gamma} \quad (0 < \gamma \leqslant 1),$$

где K и γ — положительные постоянные.

5^0. Матрицы $A^{(i,j)}(t, X)$ равномерно непрерывны по t в следующем смысле:

$$\lim_{h\to 0} \sup |A^{(i,j)}(t + h, X) - A^{(i,j)}(t, X)| = 0.$$

Если оператор, стоящий в (8) справа, сильно-эллиптический (2), то 5^0 излишне. Условия 1^0—5^0 слабее, чем в работе (1).

При условиях 1^0—5^0 однородная система типа (8) и ей сопряженная имеют основные матрицы решений, и для них имеют место неравенства (2). Вместо неравенства (3) получим:

$$|D_x^l G(t+h, X+H; \tau, Y) - D_x^l G(t, X; \tau, Y)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C(|H| + |h|^{1/2})^\gamma}{(t-\tau)^{\frac{h+\gamma+l}{2}}} \exp\left\{-\eta \frac{|x-Y|^2}{t-\tau}\right\}, \quad 0 \leqslant l \leqslant 2. \tag{9}$$

Из этих неравенств вытекает равномерно корректная разрешимость задачи Коши для однородных систем типа (8) при тех же условиях, что для систем (1) с коэффициентами, зависящими только от t. Если $A(t, X)$ зависит только от t, то имеют место формулы (6) и (7). В общем случае они несколько сложнее.

Теоремы, формулируемые ниже, доказываются при помощи оценок (2) и формулы Грина.

Теорема 3. *Пусть* $\tilde{G}(t, X; \tau, Y)$ — *основная матрица решений сопряженного с* (1) *уравнения. Тогда*

$$\tilde{G}(t, X; \tau, Y) = G^*(\tau, Y; t, X),$$

где $G^*(\tau, Y; t, X)$ — *матрица, эрмитово сопряженная с* $G(\tau, Y; t, X)$.

Теорема 4. *Имеют место равенства:*

$$G(t, X; \tau, Y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(t, X; s, Z) G(s, Z; \tau, Y)\, dZ, \quad \tau \leqslant s \leqslant t, \ \tau < t; \tag{10}$$

$$\lim_{\tau \to t-0} \frac{1}{t-\tau}\left[\iint_{-\infty}^{+\infty} G(t, X; \tau, Y)\, dY - E\right] = A(t, X); \tag{11}$$

$$\lim_{\tau \to t-0} \frac{1}{t-\tau} \iint_{-\infty}^{+\infty} \prod_{s=1}^{r} (y_{i_s} - x_{i_s}) G(t, X; \tau, Y)\, dY = \begin{cases} r!\, A^{(i_1, \ldots, i_r)}(t, X), & 1 \leqslant r \leqslant 2p, \\ 0, & r > 2p. \end{cases} \tag{12}$$

Имеют место также (11) *и* (12), *если* $t \to \tau + 0$.

Теорема 5. *Пусть* $A(t, X)$ *зависит только от* t. *Матрица*

$$Z = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(t, X; \tau, Y)\, dY, \quad t > \tau,$$

зависит только от t *и* τ, *и она является фундаментальной для системы обыкновенных дифференциальных уравнений*:

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z, \quad z|_{t=\tau} = E.$$

Из равенства (11) и теоремы 5 следует

Теорема 6. *Для того, чтобы*

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} G(t, X; \tau, Y)\, dY = E, \quad t \geqslant \tau,$$

необходимо и достаточно, чтобы $A(t, X) \equiv 0$.

Из (10) вытекает существование при $t > \tau$ непрерывных смешанных производных $D_x^l D_y^m G(t, X; \tau, Y)$, $\frac{\partial}{\partial t} D_y^m G(t, X; \tau, Y)$, $\frac{\partial}{\partial \tau} D_x^l G(t, X; \tau, Y)$, $\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \tau} G(t, X; \tau, Y)$ $(0 \leqslant l \leqslant 2p;\ 0 \leqslant m \leqslant 2p)$.

Поступило
9 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Эйдельман, ДАН, **98**, № 6 (1954). [2] М. И. Вишик, Матем. сборн., **29** (71): 3 (1951).