Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. Г. АРАМАНОВИЧ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 VI 1955)

Рассмотрим упругую, изотропную и однородную полуплоскость, имеющую отверстие круговой формы, расположенное вблизи ее границы, и предположим, что в это отверстие впаяно упругое кольцо, причем упругие постоянные кольца и полуплоскости, вообще говоря, различны. Определим напряженное состояние в этой неоднородной среде, вызываемое заданной системой внешних усилий.

Обозначим границу полуплоскости через L_0, внешний контур кольца через L_1 и внутренний через L_2. Двусвязные области, ограниченные контурами L_0 и L_1 и контурами L_1 и L_2 назовем, соответственно, S_0 и S_1. Все упругие постоянные, а также напряжения и смещения, относящиеся к области S_0, будем отмечать индексом 0, а к области S_1 — индексом 1. Систему координат комплексной плоскости $z = x + iy$ выберем так, как указано на рис. 1. Радиус окружности L_1 примем равным единице, радиус окружности L_2 обозначим через r и расстояние от контура L_0 до действительной оси — через h.

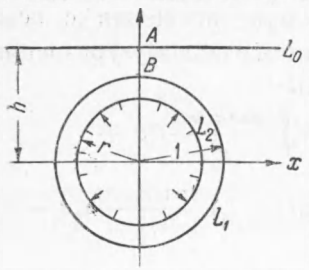


Рис. 1

Будем считать, что упругая среда невесома и подвержена действию нормального давления, равномерно распределенного на контуре L_2. Предположим также, что на линии контакта обеих сред L_1 соблюдено условие непрерывности векторов напряжения и смещения при переходе из одной среды в другую.

Для случая, когда упругие постоянные обеих сред совпадают, т. е. имеем просто упругую полуплоскость, ослабленную круговым отверстием, задача эта была решена Джеффри ([1]). Случай подкрепленного отверстия в бесконечной плоскости ($h \to \infty$) был впервые рассмотрен С. Г. Михлиным ([2]).

Вводя комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили ([3]) — функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, регулярные в области S_0, и функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, регулярные в кольце S_1, — приводим отыскание этих потенциалов к следующей краевой задаче

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0 \qquad \text{на контуре } L_0; \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} &= \varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} + C_1 \\ \varkappa_0\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} &= \varepsilon\left[\varkappa_1\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}\right] \end{aligned}\right\} \text{ на контуре } L_1 \quad (2),\ (3)$$

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = -pt + C_2 \text{ на контуре } L_2, \quad (4)$$

где предполагается, что $\varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = 0$; $\varepsilon = \mu_0/\mu_1$ (относительная жесткость); $\varkappa_j = 3 - 4\sigma_j$ для плоской деформации и $\varkappa_j = (3 - \sigma_j)/(1 + \sigma_j)$ для плоского напряженного состояния; σ_j — коэффициент Пуассона; $\mu_j = E_j/2(1 + \sigma_j)$ — модуль сдвига; E_j — модуль Юнга; p — внутреннее давление.

Если функции $\varphi_j(z)$ и $\psi_j(z)$ $(j = 0,1)$ будут найдены, то компоненты напряжений определятся по общеизвестным формулам Колосова.

Будем искать комплексные потенциалы $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами a_n и $a_n'(n, n' = -\infty, \ldots, \infty)$ (логарифмические члены отсутствуют, так как главный вектор внешних усилий равен нулю). Следуя методу Д. И. Шермана, функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ будем искать в виде:

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad \psi_0(z) = \psi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\omega(\tau)} + \overline{\tau}\omega'(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad (5)$$

где через $\omega(\tau)$ обозначены граничные значения функции $\varphi_0(z)$ на контуре L_0.

Используя формулы Племеля — Сохоцкого для предельных значений интеграла типа Коши и условие (1), нетрудно показать, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть аналитически продолжены во всю область $|z| > 1$ и представлены в ней рядами

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty b_n z^{-n}, \qquad \psi(z) = \sum_1^\infty b_n' z^{-n}. \qquad (6)$$

Переходя в уравнениях (2) и (3) к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, получим уравнения того же вида, но с добавлением в левых частях функций $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$, которые выражаются через вспомогательную функцию ω при помощи интегралов типа Коши по контуру L_0. Коэффициенты разложения этих функций в ряды Фурье на контуре L_1 можно выразить через величины α_n и β_n, определяемые формулами

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau, \qquad \beta_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega(\tau)}{\bar{\tau}^{n+1}}d\tau. \qquad (7)$$

Из условия симметрии поставленной задачи следует, что все α и β с нечетными индексами действительны, а с четными чисто мнимы.

Присоединяя к полученным уравнениям уравнение (4) и заменяя все функции их разложениями, мы сможем последовательно выразить коэффициенты a_n, a_n', b_n, b_n' через величины α_n и β_n. Введем для этого обозначения $(k \geqslant 0)$:

$$\delta_1 = (1 - \varepsilon)(1 - r^2); \quad \delta_2 = (\varkappa_0 + \varepsilon)(1 - r^2); \quad D_k = (k^2 - 1)\delta_1\delta_2 - E_k F_k;$$

$$E_k = (1 + \varepsilon\varkappa_1) - (1 - \varepsilon) r^{2(k+1)}; \quad F_k = (\varkappa_0 + \varepsilon) r^{-2(k-1)} - (\varkappa_0 - \varepsilon\varkappa_1);$$

$$M_k = (1 + \varkappa_0)\alpha_k; \quad N_{-k} = (1 + \varkappa_0)[(k + 2)\bar{\alpha}_{k+2} - 2(k + 1) ih\bar{\alpha}_{k+1} - k\bar{\alpha}_k + \beta_k],$$

$$\Delta_1 = r^{-1}[2 + \varepsilon(\varkappa_1 - 1)] - 2r(1 - \varepsilon);$$

$$u_k^{(4)} = 1 + (1 + \varkappa_0)[E_k(r^{-2(k-1)} - 1) - \sigma_1(k^2 - 1)(1 - r^2)]/D_k;$$

$$u_k^{(3)} = -(k - 1) u_k^{(4)}; \quad u_k^{(2)} = -2khu_k^{(4)};$$

$$u_k^{(1)} = (k+1)\,u_k^{(4)} + (1+\varkappa_0)(k+1)(1-r^2)(1+\varkappa_1)\varepsilon/D_k;$$

$$v_k^{(4)} = k - 1 + (1+\varkappa_0)\,r^2(k-1)\,[E_{k-1}(r^{-2k}-1) - \sigma_1 k^2(r^{-2}-1)]/D_k;$$

$$v_k^{(3)} = -(k-1)\,v_k^{(4)};\quad v_k^{(2)} = -2khv_k^{(4)};$$

$$v_k^{(1)} = (k+1)\,v_k^{(4)} + 1 + (1+\varkappa_0)\,\{(k^2-1)(1-r^2)\,[\varepsilon(1+\varkappa_1) - \delta_2] + F_k(1-r^{2(k+1)})\}/D_k.$$

Формулы для $u_k^{(j)}$ и $v_k^{(j)}$ для значений $k=0$ и $k=1$ надо изменить следующим образом:

$$u_0^{(j)} = u_1^{(j)} = 0\ \ (j=1,2,3,4);$$

$$v_0^{(j)} = v_1^{(j)} = 0\ \ (j=2,3,4);\quad v_0^{(0)} = r\varepsilon(1+\varkappa_1)/\Delta_1;$$

$$v_0^{(1)} = 1 - (\varkappa_0+1)(r^{-1}-r)/\Delta_1;\quad v_1^{(1)} = 1 - (1-r^4)(1+\varkappa_0)/E_1.$$

При помощи введенных обозначений получим:

$$a_{k+1} = \frac{1}{D_k}\,[F_k M_{k+1} - (k-1)\,\delta_1 \overline{N}_{-(k-1)}];$$

$$a'_{k-1} = \frac{r^2}{D_k}\,[-(k+1)\,F_{k+1}M_{k+1} + (k^2\delta_1 + r^{-2k}E_{k-1})\,\overline{N}_{-(k-1)}];$$

$$a_{-(k-1)} = \frac{1}{D_k}\,[(k+1)\,\delta_2 \overline{M}_{k+1} - E_k N_{-(k-1)}];$$

$$a'_{-(k+1)} = \frac{r}{D_k}\,[(k^2\delta_2 - r^{2k}F_{k+1})\,\overline{M}_{k+1} - (k-1)\,E_{k-1}N_{-(k-1)}];$$

$$a_1 = \frac{pr(1-\varepsilon) - r^{-1}M_1}{\Delta_1};\quad a_2 = -\frac{M_2}{E_1};$$

$$a'_{-1} = \frac{-pr\,[2+\varepsilon(\varkappa_1-1)] + 2rM_1}{\Delta_1};\quad a'_{-2} = \frac{r^4\overline{M}_2}{E_1};$$

$$b_{k-1} = u_k^{(1)}\overline{\alpha}_{k+1} + iu_k^{(2)}\overline{\alpha}_k + u_k^{(3)}\overline{\alpha}_{k-1} + u_k^{(4)}\beta_{k-1};$$

$$b'_{k+1} = v_k^{(1)}\overline{\alpha}_{k+1} + iv_k^{(2)}\overline{\alpha}_k + v_k^{(3)}\overline{\alpha}_{k-1} + v_k^{(4)}\beta_{k-1};$$

$$b'_1 = -pv_0^{(0)} + 2v_0^{(1)}\alpha_1.$$

Для определения величин α_n и β_n воспользуемся уравнением (1). Подставив в него предельные значения $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$, взятые из (5), получим

$$\omega(\tau) = \varphi(\tau) - \tau\overline{\varphi'(\tau)} - \overline{\psi(\tau)}. \tag{8}$$

Заменим теперь функции $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ разложениями (6), где взамен коэффициентов b_n и b'_n подставлены их выражения через α_n и β_n. Умножая обе части полученного равенства последовательно на $\{2\pi i\tau^{k+1}\}^{-1}$ и $\{2\pi i\overline{\tau}^{k+1}\}^{-1}$ $(k=1,2,\ldots)$ и интегрируя по контуру L_0, придем к бесконечной системе уравнений:

$$\alpha_k = -v_0^{(1)}J_{k,1}\alpha_1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{k,n}\alpha_n + S^*_{k,n}\overline{\beta}_n + pv_0^{(0)}J_{k,1};\qquad \beta_k = \sum_{n=1}^{\infty} R^*_{k,n}\overline{\alpha}_n + R_{k,n}\beta_n;$$

$$S_{k,n} = nJ_{k-1,n+1}u_{n+1}^{(3)} - i(n-1)\,J_{k-1,n}u_n^{(2)} + (n-2)\,J_{k-1,n+1}u_{n-1}^{(1)} - J_{k,n}v_{n-1}^{(1)} + iJ_{k,n+1}v_n^{(2)} - J_{k,n+2}v_{n+1}^{(3)};\quad S^*_{k,n} = nJ_{k-1,n+1}u_{n+1}^{(4)} - J_{k,n+2}v_{n+1}^{(4)};$$

$$R_{k,n} = J_{n-1,k+1}u^{(4)}_{n+1};\quad R^{*}_{k,n} = J_{n-1,k+1}u^{(3)}_{n+1} + iJ_{n-2,k+1}u^{(2)}_{n} + J_{n-3,k+1}u^{(1)}_{n-1};$$

$$J_{n,k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{d\tau}{\tau^{n+1}\bar{\tau}^{k}} = \frac{i^{k-n-2}(n+k-1)!}{(2h)^{n+k}\,n!\,(k-1)!}\quad (n \geqslant 0,\ k \geqslant 1).$$

Из определения чисел $J_{n,k}$ и условия симметрии вытекает, что эта система является системой с действительными коэффициентами относительно $\operatorname{Im}\alpha_{2k}$, $\operatorname{Im}\beta_{2k}$, $\operatorname{Re}\alpha_{2k+1}$ и $\operatorname{Re}\beta_{2k+1}$. Можно показать, что она будет квазирегулярна при $h > 1$, а при h, не очень близких к 1, вполне регулярна. Показано также, что $|\alpha_k|$ и $|\beta_k|$ убывают с ростом k не медленнее, чем $k^2/(2h-1)^k$.

Примечание. Величины α_0 и β_0, а также определяемые при их помощи a_0 и a'_0 не нужны для решения задачи. Они только влияют на значения постоянных C_1 и C_2, при помощи которых в уравнениях (2) и (4) соблюдается точное равенство.

После определения величин α_k и β_k строятся искомые комплексные потенциалы. Функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ определяются непосредственно их разложениями. Выражения для $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ получаются при помощи (5) и имеют несколько более сложный вид:

$$\varphi_0(z) = \sum_1^{\infty} b_n z^{-n} - n\bar{b}_n z J_{n+1}(z) + \bar{b}_n J_n(z);\ J_n(z) = -(z-2ih)^{-n};$$

$$\psi_0(z) = \sum_1^{\infty} b'_n z^{-n} + [(n+1)\bar{b}_n + n\bar{b}'_n]J_n(z) - n(n+1)\bar{b}_n z J_{n+1}(z).$$

Все ряды равномерно сходятся в замкнутых областях $\bar{S}_0$ и $\bar{S}_1$.

Проведенные вычисления указывают на достаточно хорошую сходимость полученных рядов даже при небольших значениях h.

Для числового примера взяты следующие данные: $E_0 = 26\cdot 10^3$ кГ/см²; $\sigma_0 = 0{,}3$; $E_1 = 140\cdot 10^3$ кГ/см²; $\sigma_1 = 0{,}16$; $r = 0{,}8$. Рассматривался случай плоской деформации. В табл. 1 приведены, как наиболее характерные, значения X^j_x/p по сечению CA (рис. 1) при разных h. Отметим также, что наибольшая величина растягивающего напряжения на контуре L_2 для $h = 2{,}5$ достигается при $\arg z \approx \pi/9$ и равна $3{,}1\,p$, а для $h = 1{,}25$ при $\arg z \approx \pi/6$ и примерно равна $4p$.

Таблица 1

Значения $X^{(0)}_x/p$ и $X^{(1)}_x/p$

h	A	B_0	B_1	C
∞	0	0,31	2,15	2,84
5	0,05	0,31	2,19	2,85
2,5	0,20	0,34	2,30	2,88
1,25	0,90	0,64	3,30	3,02

Подобным же методом решены для рассматриваемой области задачи о концентрации напряжений при растяжении, о действии сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости, о влиянии силы тяжести.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Д. И. Шерману за внимание к настоящей работе.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта
им. И. В. Сталина

Поступило
14 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Jeffery, Trans. Roy. Soc. London, A, 221 (1921). [2] С. Г. Михлин, Прикладн. матем. и мех., 2, № 1 (1934). [3] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1954.