Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

Б. В. РУСАНОВ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 VI 1955)

В гидродинамике известны уравнения теории исчезающей вязкости, выведенные Озееном (1). Подробный вывод этих уравнений приведен в книге Вилля (2). Однако при более тщательном рассмотрении вопроса обнаруживается ряд математических ошибок, содержащихся в выводе Озеена — Вилля и существенно искажающих постановку задачи.

Для составляющих скорости $u_i(x_1, x_2, x_3, t, \mu)$ и функции $q = p + \frac{\rho}{2}\sum_i u_i^2$, где p — давление, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости, справедливы следующие формулы, выведенные Озееном (3):

$$u_i = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\iint\limits_{S(t)}\frac{1}{r}\sum_k u_k\cos(n, \xi_k)\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\pi\rho}}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\iint\limits_{S(\tau)}\sum_k u_k\frac{\partial u_{ik}}{\partial n}d\sigma + \\ + \sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi}}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\iint\limits_{S(\tau)}\sum_k u_{ik}a_k d\sigma, \qquad (1)$$

$$q = \frac{\rho}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S(t)}\frac{1}{r}\sum_k u_k\cos(n, \xi_k)\,d\sigma + \frac{\mu}{4\pi}\iint\limits_{S(t)}\sum_k u_k\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial(1/r)}{\partial\xi_k}d\sigma + \\ + \rho\iint\limits_{S(t)}\sum_k a_k\frac{\partial(1/r)}{\partial\xi_k}d\sigma, \qquad (2)$$

$$u_{ik} = \frac{\partial^2 P}{\partial\xi_i\partial\xi_k} - \delta_{ik}\Delta_\xi P, \qquad P = \frac{1}{r}\int\limits_0^r\frac{e^{-\rho\alpha^2/4\mu(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}d\alpha, \qquad r = \left(\sum_k(\xi_k - x_k)^2\right)^{1/2},$$

$$a_k(\xi_s, \tau, \mu) = -\frac{1}{4\pi\rho}\left\{\mu\frac{\partial u_k}{\partial n} - q_0\cos(n, \xi_k) + \rho u_k V_n\right\},$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases}0, & i \neq k,\\ 1, & i = k,\end{cases} \qquad i = 1, 2, 3. \qquad (3)$$

Здесь q_0 — граничное значение функции q на поверхности тела $S(\tau)$; V_n — нормальная составляющая скорости тела в точках поверхности $S(\tau)$. Нормаль берется внешняя по отношению к телу. Суммирование идет от 1 до 3. Рассматривается поступательное движение тела параллельно оси x_1 со скоростью $U(t) \geqslant 0$. Поверхность тела $S(t)$ разделяется на две стороны: переднюю $S_1(t)$ и заднюю $S_2(t)$.

Выполняя предельный переход в (1), (2) при $\mu \to 0$, когда точка $M_1(x_1, x_2, x_3)$ лежит вне $S(t)$, найдем функции u_i, q предельного режима через предельные (при $\mu \to 0$) значения a_k. Затем, устремляя точку M_1

при $\mu > 0$ к точке M, лежащей на $S(t)$, и снова переходя к пределу при $\mu \to 0$, получим уравнения для определения функций a_k.

Первое слагаемое в формуле (1) для u_i при $\mu > 0$, в силу условий прилипания, имеет вид:

$$J = -\frac{U(t)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\iint\limits_{S(t)}\frac{\cos(n, \xi_1)}{r}\,d\sigma.$$

Так как J не зависит от μ, то, очевидно, $\lim\limits_{\mu\to 0} J = J$. Озеен и Вилля ошибочно считают, что $\lim\limits_{\mu\to 0} J = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}$, где ψ — произвольная гармоническая функция, ссылаясь при этом, совершенно не по существу, на то, что составляющие скорости $u_i(M_1, t, \mu)$ стремятся к граничным значениям $U(t)\delta_{1i}$ неравномерно относительно $\mu \geqslant 0$, когда точка M_1 стремится к точке поверхности $S(t)$. Введение произвольной функции вместо заданной вносит произвол, характерный для теории Озеена. Далее, при выводе уравнений для a_k ошибочно утверждается, что второе слагаемое в (1) при $\mu \to 0$ обращается в нуль. Это слагаемое в действительности дает на $S_1(t)$ выражение $U(t)(\delta_{1i} - \cos(n, x_1)\cos(n, x_i))$. Затем при вычислении предела при $\mu \to 0$ третьего слагаемого в формуле (1) рассматривается несобственный интеграл:

$$\iiint\limits_{\Omega+G}\sum_k \frac{a_k^{\mathrm{I}}}{U\cos(n, \xi_1)}\frac{\partial^2(1/r)}{\partial\xi_i\partial\xi_k}\,d\omega. \tag{4}$$

Здесь (см. рис. 1) G — область, занятая телом в момент t; G_0 — область, занимаемая телом в начальный момент t_0; Ω — область, заключенная между G_0 и G, ограниченная цилиндрической боковой поверхностью S_0; $a_k^{\mathrm{I}}(N)$ — значение функции a_k, определенной на $S(\tau)$ в точке $N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в момент прохождения через N поверхности $S_1(\tau)$. Аналогично определяются функции a_k^{II} в $G_0 + \Omega$. Точка $M(x_1, x_2, x_3)$ лежит либо внутри $\Omega + G$, либо на $S_1(t)$. Несобственный интеграл (4) получается путем удаления малого цилиндра с образующими, параллельными оси x_1, содержащего точку M внутри себя, при стягивании контура этого цилиндра в точку. Этот интеграл в дальнейшем ошибочно понимается Озееном и Вилля уже в другом смысле: из области $\Omega + G$ удаляется слой, содержащий точку M, ограниченный поверхностями $S_1(t_1 - \varepsilon)$, $S_1(t_1 + \varepsilon)$, где t_1 — время прохождения точки M поверхностью $S_1(\tau)$. После этого ε стремится к нулю. Несобственные интегралы указанных типов не равны один другому. Кроме того необоснованно утверждается стремление к нулю при $\mu \to 0$ некоторых интегралов (J_3 по обозначениям Вилля), имеющих в действительности пределы, не равные нулю.

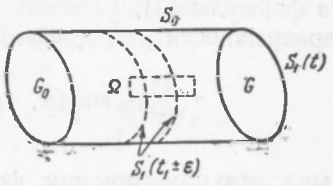


Рис. 1

Сформулируем окончательный результат. Составляющие скорости $u_i(M, t)$ и функция $q(M, t)$ предельного режима (при $\mu \to 0$) даются формулами:

$$u_i = \partial\varphi/\partial x_i, \text{ когда } M \text{ вне } G_0 + \Omega + G; \tag{5}$$

$$u_i = 4\pi\alpha_i + \partial\varphi/\partial x_i, \text{ когда } M \text{ внутри } G_0 + \Omega; \tag{6}$$

$$q = -\rho\,\partial\varphi/\partial t, \text{ когда } M \text{ вне } G. \tag{7}$$

Здесь $\alpha_i = a_i^{\mathrm{I}}(M)/U_n^{\mathrm{I}}(t_1) + a_i^{\mathrm{II}}(M)/U_n^{\mathrm{II}}(t_2)$; $U_n = U|\cos(n, x_1)|$; t_1 и t_2 — моменты прохождения через M $S_1(\tau)$ и $S_2(\tau)$. Для определения семи функций a_i^{I}, a_i^{II}, φ имеем следующую систему уравнений:

Точка M на $S_1(t)$:

$$U(t)\,\delta_{1i} = \frac{4\pi a_i^{\mathrm{I}}}{U_n^{\mathrm{I}}(t)} - \frac{4\pi\cos(n, x_i)}{U_n^{\mathrm{I}}(t)}\sum_k a_k^{\mathrm{I}}\cos(n, x_k) +$$

$$+ U(t)\,(\delta_{1i} - \cos(n, x_1)\cos(n, x_i)) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_e. \tag{8}$$

Точка M на $S_2(t)$:

$$U(t)\,\delta_{1i} = 4\pi\alpha_i(M) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_e. \tag{9}$$

$$\varphi = -\frac{U(t)}{4\pi}\iint\limits_{S(t)}\frac{\cos(n, \xi_1)}{r}\,d\sigma - \iiint\limits_{G_0+\Omega}\sum_k \frac{a_k^{\mathrm{II}}}{U_n^{\mathrm{II}}}\frac{\partial(1/r)}{\partial\xi_k}\,d\omega - \iiint\limits_{\Omega+G}\sum_k \frac{a_k^{\mathrm{I}}}{U_n^{\mathrm{I}}}\frac{\partial\,(1/r)}{\partial\xi_k}\,d\omega. \tag{10}$$

Значок e у производной означает внешнюю по отношению к G производную.

У Озеена: 1) в (6) справа лишнее слагаемое $-\frac{4\pi}{U_n^{\mathrm{II}}}\cos(n, x_i)\sum_k a_k^{\mathrm{II}}\cos(n, x_k)$; 2) в (8) справа отсутствует слагаемое $U(\delta_{1i} - \cos(n, x_1)\cos(n, x_i))$; 3) в (10) первое слагаемое заменено произвольной гармонической функцией; 4) делаются предположения: a) $\sum_k a_k^{\mathrm{I}}\cos(n, x_k) = 0$ на $S_1(t)$; b) $\sum_k \alpha_k\cos(n, x_k) = 0$ на S_0; c) $\sum_k \frac{\partial\alpha_k}{\partial\xi_k} = 0$ в $G_0 + \Omega$. В результате 3) и 4c) уравнение (10), связывающее a_k и φ, выпадает. Предположения a), b), c) совершенно необоснованны.

Укажем некоторые новые соотношения между функциями a_k, q, φ. Из формулы (3), условий прилипания на $S(t)$ при $\mu > 0$ и уравнения неразрывности для предельных (при $\mu \to 0$) значений a_k, q_0 найдем:

$$\sum_k a_k\cos(n, x_k) = -\frac{1}{4\pi\rho}\{q_0 - \rho U^2\cos^2(n, x_1)\}. \tag{11}$$

Вычисляя при помощи формулы (1) выражения $\mu\,\partial u_i/\partial n$ на S_1 и S_2 и переходя затем к пределу при $\mu \to 0$, найдем, что на S_2 будет

$$a_k^{\mathrm{II}} = \frac{q_0}{4\pi\rho}\cos(n, x_k) - \frac{1}{4\pi}U^2\cos(n, x_1)\cdot\delta_{1k}. \tag{12}$$

Используя формулы (12), (11), (2), (8), (10), получим два интегральных уравнения (13), (14) для определения двух функций q_0, φ_0:

$$q_0(M, t) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S(t)} q_0\frac{\cos(n, r_0)}{r_0^2}\,d\sigma +$$

$$+ \frac{\rho U}{2\pi}\iint\limits_{S_1(t)}\cos(n, \xi_1)\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial l_1}\frac{\cos(l_1, r_0)}{r_0^2} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial l_2}\frac{\cos(l_2, r_0)}{r_0^2}\right\}d\sigma +$$

$$+ \frac{\rho U_t'}{2\pi}\iint\limits_{S(t)}\frac{\cos(n, \xi_1)}{r_0}\,d\sigma + \frac{\rho U^2}{2\pi}\iint\limits_{S_1(t)}\cos(n, \xi_1)\left\{\cos(n, \xi_1)\frac{\cos(n, r_0)}{r_0^2} - \frac{\xi_1 - x_1}{r_0^3}\right\}d\sigma. \tag{13}$$

Здесь l_1, l_2 — два взаимно-перпендикулярных направления в касательной плоскости, проведенной через точку $N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ поверхности $S_1(t)$; r_0 — расстояние между двумя точками поверхности $S(t)$ $N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $M(x_1, x_2, x_3)$. Интегралы по $S(t)$ понимаются как сингулярные.

$$\varphi_0(M, t) = -\frac{U(t)}{4\pi}\iint\limits_{S(t)}\frac{\cos(n, \xi_1)}{r_0}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \iint\limits_{S(\tau)} q_0\frac{\cos(n, r)}{r^2}\,d\sigma -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{t_0}^{t} U(\tau)\,d\tau \iint\limits_{S_1(\tau)} \cos(n, \xi_1)\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial l_1}\frac{\cos(l_1, r)}{r^2} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial l_2}\frac{\cos(l_2, r)}{r^2}\right\} d\sigma -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{t_0}^{t} U^2(\tau)\,d\tau\left\{\iint\limits_{S_1(\tau)}\cos^2(n, \xi_1)\frac{\cos(n, r)}{r^2}\,d\sigma + \iint\limits_{S_2(\tau)}\cos(n, \xi_1)\frac{\xi_1 - x_1}{r^3}\,d\sigma\right\}. \quad (14)$$

В (14) $\varphi_0(M, t)$ есть предельное значение функции $\varphi(M_1, t)$ (10), когда точка M_1 стремится к точке M, лежащей на $S(t)$. Можно считать, что уравнения поверхностей $S_1(t)$ и $S_2(t)$ даются формулами $t = f_1(x_1, x_2, x_3)$, $t = f_2(x_1, x_2, x_3)$, где f_1, f_2 — заданные функции. Если q_0, φ_0 найдены, то из (8), (11), (12) и условия на S_1 $(\partial\varphi/\partial n)_e = U\cos(n, x_1)$, легко следующего из (8), находим a_k^{I}, a_k^{II}. Затем из (10), (7) определяются φ, q и из (5), (6) составляющие скорости u_i.

В случае установившегося режима движения соотношения (5), (6), (8), (9), (11), (12) остаются верными с заменой $U(t)$ на $U = \mathrm{const}$, при этом координаты x_i, ξ_i отсчитываются в системе, связанной с телом. Функции α_i в Ω не зависят от x_1. Вместо (7), (10) будем иметь:

$$q = \rho U\,\partial\varphi/\partial x_1, \quad (15)$$

$$\varphi = -\frac{1}{U}\iint\limits_S\left\{\frac{a_1}{r} - \frac{a_2(\xi_2 - x_2) + a_3(\xi_3 - x_3)}{r_1^2}\left(1 + \frac{\xi_1 - x_1}{r}\right) + \frac{U^2}{4\pi}\frac{\cos(n, \xi_1)}{r}\right\} d\sigma, \quad (16)$$

где $r_1^2 = (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2$. Из (15), (8) и (11) будет следовать $a_1^{\mathrm{I}} = 0$. В случае установившегося обтекания тела вращения с осью вращения по оси x_1 задача сводится к одному интегральному уравнению для функции $X = [q_0 - \rho U^2\cos^2(n, x_1)]/\cos(l, x_1)$:

$$X(x_3)\cos(l, x_1) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S X(\xi_k)\cos(l, \xi_1)\frac{\cos(n, r_0)}{r_0^2}\,d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1} X(\xi_k)\cos(n, \xi_1)\frac{\cos(l, r_0)}{r_0^2}\,d\sigma - \frac{\rho U^2}{2\pi}\iint\limits_{S_2}\cos^2(n, \xi_1)\frac{\cos(r_0, n)}{r_0^2}\,d\sigma -$$

$$-\frac{\rho U^2}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\cos(n, \xi_1)\frac{\xi_1 - x_1}{r^3}\,d\sigma - \rho U^2\cos^2(n, x_1).$$

Здесь l — касательное направление к поверхности S_1, лежащее в плоскости, проходящей через ось симметрии. Если найдено $q_0 = \rho U(\partial\varphi/\partial x_1)_e$, то, как и выше, из (8), (11), (12) и условия на S_1 $(\partial\varphi/\partial n)_e = U\cos(n, x_1)$ находим a_k^{I}, a_k^{II}. Затем из (16), (15) определяем φ, q и из (5), (6) составляющие скорости u_i.

Предельное (при $\mu \to 0$) значение составляющей силы сопротивления по оси x_k в случае неустановившегося и установившегося режима дается формулой:

$$X_k = -4\pi\rho\iint\limits_S a_k\,d\sigma.$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. W. Oseen, Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, 1927. [2] H. Villat, Leçons sur l'hydrodynamique, 1929. [3] C. W. Oseen, Acta Math., **34**, 205 (1911).