Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 3

МАТЕМАТИКА

А. В. СКОРОХОД

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ОТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К ОДНОРОДНОМУ СЛУЧАЙНОМУ ПРОЦЕССУ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 VI 1955)

Пусть имеется последовательность серий независимых, в каждой серии одинаково распределенных случайных величин $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nn}$; пусть $S_{ni} = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots + \xi_{ni}$. Определим случайную функцию $\zeta_n(t)$:

$$\zeta_n(t) = S_{n[t(n+1)]} \quad ([x] — \text{целая часть } x). \tag{1}$$

$\zeta_n(t)$ — ступенчатая функция, имеющая в точке $\frac{k}{n+1}$ скачок размера ξ_{nk} и в интервале $\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right)$ равная S_{nk}. Предположим, что распределение вероятностей S_{nn} слабо сходится к некоторому предельному закону распределения при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{S_{nn} < x\} = \Phi(x)$. Тогда (см., например, ([1]), стр. 123, 91)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\Phi(x) = \exp\left\{i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{0}\left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) dM(u) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) dN(u)\right\}, \tag{2}$$

где γ — вещественное число; $\sigma^2 > 0$; $M(u)$ и $N(u)$ — неубывающие функции такие, что $\lim\limits_{u\to-\infty} M(u) = 0$, $\lim\limits_{u\to+\infty} N(u) = 0$.

Рассмотрим случайный однородный процесс с независимыми приращениями $\zeta(t)$, определяемый характеристической функцией

$$Me^{i\lambda\zeta(t)} = \exp\left[t\left\{i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda}{2} + \int\limits_{-\infty}^{0}\left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) dM(u) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) dN(u)\right\}\right]. \tag{3}$$

Если учесть условия сходимости $P\{S_{nn} < x\}$ к предельному распределению ([1]), стр. 124), то легко доказать, что, какие бы ни были точки $t_1, t_2, \ldots, t_k$, совместное распределение величин $\zeta_n(t_1), \zeta_n(t_2), \ldots, \zeta_n(t_n)$ слабо сходится к совместному распределению величин $\zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_k)$ при $n \to \infty$.

Пусть K обозначает пространство всех функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0, 1]$ и имеющих в каждой точке пределы справа и слева. Случайные функции $\zeta_n(t)$ всегда принадлежат K. Рассмотрим меру μ_n на K, определяемую равенством $\mu_n(A) = P\{\zeta_n(t) \in A\}$ (A — множество из

минимального борелевского тела множеств, содержащего все цилиндрические множества). Как доказано в ([4]), случайная функция $\zeta(t)$ с вероятностью 1 принадлежит K. Она определяет на K некоторую меру μ, $\mu(K)=1$.

Рассмотрим функционал $f[x(t)]$ в пространстве K, измеримый относительно мер μ_n и μ. Если этот функционал зависит лишь от значений $x(t)$ в конечном числе точек $t_1, \ldots, t_k$, причем эта зависимость непрерывна, то из сказанного выше следует, что для $f[\zeta_n(t)]$ существует предельное распределение при $n \to \infty$ и это предельное распределение совпадает с распределением $f[\zeta(t)]$.

Возникает вопрос, какими свойствами должен вообще обладать функционал f, чтобы для него выполнялось такое же соотношение, т. е. чтобы

$$P\{f[\zeta_n(t)] < \alpha\} \to P\{f[\zeta(t)] < \alpha\} \tag{4}$$

для всех α, для которых выражение в правой части, рассматриваемое как функция от α, непрерывно.

Решение этой задачи эквивалентно отысканию класса измеримых множеств A, для которых выполнялось бы

$$\lim_{n \to \infty} P\{\zeta_n(t) \in A\} = P\{\zeta(t) \in A\}. \tag{5}$$

В случае, когда $\zeta(t)$ является винеровским процессом, а множество A состоит из функций, удовлетворяющих неравенствам

$$\varphi_1(t) \leqslant x(t) \leqslant \varphi_2(t), \tag{6}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — дифференцируемые функции, формула (5) была доказана А. Н. Колмогоровым ([2,3]). При тех же ограничениях на $\zeta(t)$ формула (5) была доказана М. Донскером ([5]) для случая нарастающих сумм и Ю. В. Прохоровым ([6]) для схемы серий при гораздо более широких предположениях о природе множества A. Они требовали, чтобы $P\{\zeta(t) \in \Gamma(A)\} = 0$, где $\Gamma(A)$ обозначает границу множества A в топологии, определяемой равномерной сходимостью (как известно, в случае винеровского процесса $\zeta(t)$ с вероятностью 1 непрерывна, и поэтому все рассмотрения естественнее производить в пространстве непрерывных функций).

Случай, когда $\zeta(t)$ не является нормальным, рассматривал И. И. Гихман ([7]). При некоторых ограничениях на ξ_{nl} для множеств вида (6) (на функции φ_1 и φ_2 наложены ограничения, допускающие и некоторые разрывные функции) тоже доказывается формула (5).

В настоящей заметке доказывается, что достаточным условием для возможности предельного перехода является, как и в случае Донскера и Прохорова, непрерывность функционала почти всюду по мере μ в некоторой подходящим образом введенной топологии на пространстве K, будем обозначать ее буквой R (на подпространстве непрерывных функций она совпадает с топологией, порождаемой равномерной сходимостью).

Топология R вводится следующим образом. Пусть ε — некоторое положительное число. Положим $\Delta(t) = x(t+0) - x(t-0)$ и обозначим

$$x^\varepsilon(t) = \sum_{\substack{\tau < t \\ \varepsilon < |\Delta(\tau)|}} \Delta(\tau), \quad \bar{x}^\varepsilon(t) = x(t) - x^\varepsilon(t).$$

Последовательность $x_n(t)$ назовем сходящейся к $x(t)$, если для всякого ε, для которого $x(t)$ не имеет скачков $\pm\varepsilon$, выполняется при $n \to \infty$: а) $x_n^\varepsilon(t) \to x^\varepsilon(t)$ во всех точках непрерывности $x^\varepsilon(t)$; б) число разрывов $x_n^\varepsilon(t)$ стремится к числу разрывов $x^\varepsilon(t)$; в) $\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_t |\bar{x}_n^\varepsilon(t) - \bar{x}^\varepsilon(t)| = 0$. Первые два требования эквивалентны требованию, чтобы все разрывы $x_n(t)$ сходились к соответствующим разрывам $x(t)$ и точки, где произошли эти разрывы, сходились к соответствующим точкам $x(t)$.

Пространство K с топологией R является хаусдорфовым топологическим пространством со счетной базой.

Теорема. *Для всякого непрерывного почти всюду относительно меры* μ *функционала* f *справедлив предельный переход* (4).

Доказательство проводится сначала для непрерывных функционалов, являющихся равномерно непрерывными в равномерной топологии, потом это ограничение снимается. Идея доказательства состоит в следующем. Разобьем каждое из слагаемых ξ_{ni} на 3 составляющих:

$$\xi'_{ni} = \begin{cases} \xi_{ni} & \text{при } |\xi_{ni}| < \delta_n; \\ 0 & \text{при } |\xi_{ni}| \geqslant \delta_n; \end{cases} \qquad \xi''_{ni}(\varepsilon) = \begin{cases} \xi_{ni} & \text{при } \delta_n \leqslant |\xi_{ni}| < \varepsilon; \\ 0 & \text{при } |\xi_{ni}| < \delta_n,\ |\xi_{ni}| \geqslant \varepsilon; \end{cases} \tag{7}$$

$$\xi'''_{ni}(\varepsilon) = \begin{cases} \xi_{ni} & \text{при } |\xi_{ni}| \geqslant \varepsilon; \\ 0 & \text{при } |\xi_{ni}| < \varepsilon. \end{cases}$$

δ_n выбрано так, чтобы $\delta_n \to 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} n \left\{ \int\limits_{|x|<\delta_n} x^2 dF_n(x) - \left(\int\limits_{|x|<\delta_n} x\, dF_n(x) \right)^2 \right\} = \sigma^2.$$

$F_n(x)$ — функция распределения слагаемых в n-й серии; σ^2 — то же, что в формуле (2). Построим по величинам ξ'_{ni}, $\xi''_{ni}(\varepsilon)$, $\xi'''_{ni}(\varepsilon)$ случайные функции $\zeta'_n(t)$, $\zeta''_{n\varepsilon}(t)$, $\zeta'''_{n\varepsilon}(t)$, как мы построили $\zeta_n(t)$ по ξ_{ni} (1). $\zeta''_{n\varepsilon}(t)$ мало отличается от постоянной при достаточно малых ε, а именно: при любом $\eta > 0$ равномерно по n

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\{\sup_t |\zeta''_{n\varepsilon}(t) - M\zeta''_{n\varepsilon}(t)| > \eta\} = 0. \tag{8}$$

Поэтому, каков бы ни был непрерывный функционал f, для всякого η и $\mu > 0$ существует ε такое, что с вероятностью, большей $1-\mu$,

$$|f[\zeta_n(t)] - f[\zeta'_n(t) - M\zeta'_n(t) + l_\varepsilon(t) + \zeta'''_{n\varepsilon}(t)]| < \eta \tag{9}$$

при достаточно больших n; $l_\varepsilon(t)$ определяется из соотношения

$$l_\varepsilon(t) = \lim_{n\to\infty} M\zeta'_n(t) + M\zeta''_{n\varepsilon}(t). \tag{10}$$

Поведение $\zeta'''_{n\varepsilon}(t)$ определяется распределением числа скачков положительных и отрицательных, а также совместным распределением величин этих скачков и точек, где они произошли. Все эти величины имеют предельное распределение, при $n\to\infty$ совпадающее с распределением соответствующих величин для однородной функции $\zeta'''_\varepsilon(t)$ с независимыми приращениями, для которой

$$Me^{i\lambda\zeta'''_\varepsilon(t)} = \exp\left[t \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} (e^{i\lambda u} - 1)\, dM(u) + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} (e^{i\lambda u} - 1)\, dN(u) \right\} \right]. \tag{11}$$

Отсюда легко вывести, что если функционал, кроме оговоренных выше свойств непрерывности, еще ограничен, то

$$Mf[\zeta'''_{n\varepsilon}(t)] \to Mf[\zeta'''_\varepsilon(t)]. \tag{12}$$

С другой стороны, из теоремы Прохорова следует, что для любого непрерывного ограниченного функционала f

$$Mf[\zeta'_n(t) - M\zeta'_n(t)] \to Mf[\zeta'(t)], \tag{13}$$

где $\zeta'(t)$ — винеровский процесс с характеристической функцией

$$Me^{i\lambda\zeta'(t)} = e^{-t\sigma^2\lambda/2}. \tag{14}$$

Случайные функции $\zeta'_n(t)$ и $\zeta'''_{n\varepsilon}(t)$ асимптотически независимы в следующем смысле: для любой пары непрерывных ограниченных функционалов f_1 и f_2 выполняется соотношение

$$Mf_1[\zeta'_n(t)]\, f_2[\zeta'''_{n\varepsilon}(t)] \to Mf_1[\zeta'(t)]\, Mf_2[\zeta'''_{\varepsilon}(t)], \tag{15}$$

причем эта сходимость равномерна относительно f_1 и f_2, если они принадлежат некоторому множеству равностепенно непрерывных в равномерной топологии функционалов. Отсюда уже легко получить, что для рассматриваемого класса функционалов выполняется

$$Me^{i\lambda f[\zeta_n(t)]} \to Me^{i\lambda f[\zeta(t)]}. \tag{16}$$

Переход к почти всюду непрерывным функционалам можно сделать следующим образом. Пусть A — произвольное замкнутое множество из K. Построим непрерывный в R и равномерно непрерывный в равномерной топологии функционал f такой, что $f=1$ на A, $f<1$ вне A. Так как при любом m $\int\limits_K f^m d\mu_n \to \int\limits_K f^m d\mu$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu_n(A) \leqslant \mu(A). \tag{17}$$

Для замыкания дополнения аналогично

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu_n(\overline{K \setminus A}) \leqslant \mu(\overline{K - A}). \tag{18}$$

Сравнивая формулы (17) и (18), замечаем, что, если $\mu(A \cap \overline{K \setminus A}) = 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A), \tag{19}$$

которое эквивалентно утверждению теоремы.

Теорема может быть использована для широкого класса характеристик последовательности сумм независимых случайных величин. Примерами таких характеристик могут служить следующие: $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} S_{ni}$; $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |S_{ni}|$; $\frac{1}{n}\sum S_{ni}^k$; $\frac{1}{n}\sum |S_{ni}^k|^k$; $\sup\limits_{1\leqslant i;\, k\leqslant n} |S_{ni} - S_{nk}|$; $S_{nn} / \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_{ni}$.

Кроме таких характеристик, которые зависят лишь от конечного числа значений сумм S_{ni} при каждом n (в n-й серии не более чем от n), теорема может быть перенесена и на характеристики, зависящие при каждом n от неограниченного числа сумм (в случае нарастающих сумм), например, время до достижения заданного меняющегося с n уровня, $\tau_x = \inf\limits_{\zeta_n(t)>x} t$ или величина «первого перескока» через этот уровень γ_x $\gamma_x = \zeta_n(\tau_x) - x$.

Задача, решенная в настоящей заметке, была поставлена мне Б. В. Гнеденко, выражаю ему за это свою глубокую благодарность. Я также глубоко благодарен Е. Б. Дынкину за ценные советы и указания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949. [2] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 959 (1931). [3] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 363 (1933). [4] P. Lévy, Annali Scuola normale Pisa, s. 2, 3, 337 (1934). [5] M. Donsker, Mem. Am. Math. Soc., No. 6 (1951). [6] Ю. В. Прохоров, Усп. матем. наук, 8, 165 (1953). [7] И. И. Гихман, Матем. збірн. Київськ. державн. унів., 7, 75 (1953).